

E 106

**Hohlraumresonatoren /
Cavities**

**Ergänzende Informationen
zur Versuchsdurchführung**

E 106 Hohlraumresonatoren (Cavities)

Inhaltsverzeichnis:

| | |
|--|-----------|
| 1. Hohlraumresonatoren | 3 |
| 1.1. Wellenausbreitung und Maxwellsche Gleichungen | 3 |
| 1.2. Hohlleiter | 4 |
| 1.3. Eigenmoden zylindrischer Resonatoren | 9 |
| 2. Das Cavity als Schwingkreis | 13 |
| 2.1. Definition der Kenngrößen im unbelasteten Fall | 13 |
| 2.2. Erzwungene Schwingungen | 14 |
| 2.3. Belasteter Fall durch Einkopplung von Hochfrequenz | 16 |
| 3. Der komplexe Reflexionsfaktor | 18 |
| 3.1. Abhängigkeit vom Leitungsabschluss | 18 |
| 3.2. Reflexion in der Nähe einer isolierten Resonanz | 18 |
| 4. Messung von ρ | 20 |
| 4.1. Die „Resonanzkurve“ | 20 |
| 4.2. Bestimmung der Resonanzfrequenz und der Kopplung | 21 |
| 4.3. Bestimmung der Kreisgüte | 21 |
| 5. Vektorielle Messung des Reflexionsfaktors | 22 |
| 5.1. Die „Resonanzkurve“ in der komplexen Ebene | 22 |
| 5.2. Bestimmung der Resonanzfrequenz und der Kopplung | 25 |
| 5.3. Bestimmung der Kreisgüte | 27 |
| 5.4. Weitere wichtige Größen und das Smith-Diagramm | 28 |
| 6. Störkörpermessungen | 33 |
| 6.1. Slater-Formel | 33 |
| 6.2. Resonante Störkörpermessung | 35 |
| 6.3. Nicht resonante Störkörpermessung | 36 |
| 6.4. Bestimmung der Shuntimpedanz | 36 |
| 7. Anhang | 38 |
| 7.1. Feldplots einiger Resonatormoden | 38 |
| 7.2. Einfluss seitlicher Öffnungen im Resonator auf die Feldverteilung | 42 |

1. Hohlraumresonatoren

Wir leiten die Eigenschwingungen (resonanten Moden) eines Hohlraumresonators aus den Maxwell'schen Gleichungen ab. Dazu behandeln wir zunächst die Wellenausbreitung in zylindrischen Hohlleitern und führen die unterschiedlichen Ausbreitungsformen von Wellen (Hohlleitermoden) ein. Der Übergang zu zylindrischen Hohlraumresonatoren gelingt danach durch ein Verschließen des Hohlleiters durch leitende Wände, wodurch in longitudinaler Richtung zusätzliche Randbedingungen entstehen und stehende Wellen auftreten.

1.1. Wellenausbreitung und Maxwell'sche Gleichungen

Startpunkt sind die Maxwell'schen Gleichungen in differentieller Form, die sich für Vakuum (hier sind keine Ladungsträger vorhanden!) mit Hilfe von ϵ_0 und μ_0 durch die E - und H -Felder ausdrücken lassen:

| | | |
|---|-------------|--|
| $rot \vec{E} = - \frac{\partial \vec{B}}{\partial t}$ | Vakuum ↳ | $\vec{\nabla} \times \vec{E} = - \mu_0 \cdot \frac{\partial \vec{H}}{\partial t}$ |
| $div \vec{D} = \rho$ | Vakuum ↳ | $\vec{\nabla} \cdot \vec{E} = 0$ |
| $rot \vec{H} = \vec{j} + \frac{\partial \vec{D}}{\partial t}$ | Vakuum ↳ | $\vec{\nabla} \times \vec{H} = \epsilon_0 \cdot \frac{\partial \vec{E}}{\partial t}$ |
| $div \vec{B} = 0$ | Vakuum ↳ | $\vec{\nabla} \cdot \vec{H} = 0$ |

Bilden wir nun die Rotation der ersten (bzw. der dritten) Gleichung, ersetzen den Ausdruck $\vec{\nabla} \times \frac{\partial \vec{H}}{\partial t}$ (bzw. $\vec{\nabla} \times \frac{\partial \vec{E}}{\partial t}$) durch die zeitliche Ableitung der dritten (bzw. der ersten) Gleichung und nutzen die Operatoridentität

$$\vec{\nabla} \times (\vec{\nabla} \times \vec{a}) = \vec{\nabla} (\vec{\nabla} \cdot \vec{a}) - \Delta \vec{a},$$

so erhalten wir unter Ausnützung der Divergenzbeziehungen (Maxwell-Gleichung zwei bzw. vier) die Differentialgleichungen des elektrischen und magnetischen Felds für eine Wellenausbreitung im Vakuum:

E 106 Hohlraumresonatoren (Cavities)

$$\Delta \vec{E}(\vec{r}, t) - \frac{1}{c^2} \frac{\partial^2 \vec{E}(\vec{r}, t)}{\partial t^2} = 0$$
$$\Delta \vec{H}(\vec{r}, t) - \frac{1}{c^2} \frac{\partial^2 \vec{H}(\vec{r}, t)}{\partial t^2} = 0$$

mit $c^2 = \frac{1}{\mu_0 \epsilon_0}$

Betrachten wir ausschließlich Wellen einer bestimmten Frequenz ω , können wir die Zeitabhängigkeit explizit durch

$$\vec{E}(\vec{r}, t) = \vec{E}(\vec{r}) \cdot e^{i\omega t}, \quad \vec{H}(\vec{r}, t) = \vec{H}(\vec{r}) \cdot e^{i\omega t}$$

ausdrücken und die Wellengleichung durch Einsetzen vereinfachen:

$$\Delta \vec{E}(\vec{r}) + \frac{\omega^2}{c^2} \vec{E}(\vec{r}) = 0$$
$$\Delta \vec{H}(\vec{r}) + \frac{\omega^2}{c^2} \vec{H}(\vec{r}) = 0$$

1.2. Hohlleiter

Wir beginnen mit der Betrachtung allgemeiner, in z -Richtung ausgerichteter Hohlleiter, die damit auch die Wellenausbreitung auf die z -Richtung festlegen.

Mit dem Ansatz $\vec{E} = \vec{E}(x, y) \cdot e^{i(\omega t - kz)}$ und der Aufteilung $\Delta = \Delta_{\perp} + \frac{\partial^2}{\partial z^2}$ ergibt sich

für die longitudinalen Felder:

$$\Delta_{\perp} E_z + k_c^2 E_z = 0$$
$$\Delta_{\perp} H_z + k_c^2 H_z = 0$$

mit $\frac{\omega^2}{c^2} - k^2 = k_c^2$

(Dispersionsrelation des Hohlleiters)

Die Größe k_c wird auch als kritische Wellenzahl bezeichnet und ist eine Kenngröße des Hohlleiters – wie wir im Folgenden noch sehen werden.

Zur Berechnung der transversalen Felder nutzen wir die erste (bzw. dritte) Maxwellsche Gleichung. **Es wird sich herausstellen, dass eine Kenntnis der longitudinalen Felder E_z und H_z ausreicht und die zugehörigen transversalen Felder \vec{E}_{\perp} und \vec{H}_{\perp} aus den longitudinalen berechnet werden können.** So erhalten wir z. B. für das E -Feld

E 106 Hohlraumresonatoren (Cavities)

$$\begin{aligned} \left(\vec{\nabla} \times \vec{E}_\perp\right)_x &= -\frac{\partial E_y}{\partial z} = +ikE_y & \Rightarrow \left(\vec{\nabla} \times \vec{E}_\perp\right)_\perp &= ik\vec{E}_\perp \times \hat{e}_z \\ \left(\vec{\nabla} \times \vec{E}_\perp\right)_y &= +\frac{\partial E_x}{\partial z} = -ikE_x \\ \vec{\nabla} \times (E_z \cdot \hat{e}_z) &= \vec{\nabla} E_z \times \hat{e}_z = \vec{\nabla}_\perp E_z \times \hat{e}_z = \vec{\nabla}_\perp \times (E_z \cdot \hat{e}_z) \end{aligned}$$

Kombinieren wir diese zwei Gleichungen, ergibt sich

$$\left(\vec{\nabla} \times \vec{E}\right)_\perp = \left(ik\vec{E}_\perp + \vec{\nabla}_\perp E_z\right) \times \hat{e}_z$$

und völlig analog $\left(\vec{\nabla} \times \vec{H}\right)_\perp = \left(ik\vec{H}_\perp + \vec{\nabla}_\perp H_z\right) \times \hat{e}_z$.

Aus der ersten und dritten Maxwellschen Gleichung erhalten wir

$$\begin{aligned} \left(ik\vec{E}_\perp + \vec{\nabla}_\perp E_z\right) \times \hat{e}_z &= -i\omega\mu_0\vec{H}_\perp & \text{oder} & & ik\vec{E}_\perp + \vec{\nabla}_\perp E_z &= i\omega\mu_0\vec{H}_\perp \times \hat{e}_z \\ \left(ik\vec{H}_\perp + \vec{\nabla}_\perp H_z\right) \times \hat{e}_z &= i\omega\varepsilon_0\vec{E}_\perp & & & ik\vec{H}_\perp + \vec{\nabla}_\perp H_z &= -i\omega\varepsilon_0\vec{E}_\perp \times \hat{e}_z \end{aligned}$$

was sich nach etwas Rechnen (Einsetzen über Kreuz) zu folgenden Beziehungen umwandeln lässt:

$$\begin{aligned} ik_c^2 \vec{E}_\perp &= k\vec{\nabla}_\perp E_z + \omega\mu_0 \vec{\nabla}_\perp H_z \times \hat{e}_z \\ ik_c^2 \vec{H}_\perp &= k\vec{\nabla}_\perp H_z - \omega\varepsilon_0 \vec{\nabla}_\perp E_z \times \hat{e}_z \end{aligned}$$

Wir können die verschiedenen möglichen Wellen wie folgt klassifizieren:

a) Fall $k_c^2 = 0$:

Phasengeschwindigkeit aus der Dispersionsrelation:

$$v_{ph} = \frac{\omega}{k} = c$$

Impedanz über $\zeta = \frac{E}{H}$, damit $\vec{\nabla}_\perp E_z = -\zeta \cdot \vec{\nabla}_\perp H_z \times \hat{e}_z$:

$$\zeta = \sqrt{\frac{\mu_0}{\varepsilon_0}}$$

- 1.) $\vec{\nabla}_\perp E_z \neq 0, \vec{\nabla}_\perp H_z \neq 0$: HE oder EH Hybrid-Wellen (werden zur Ablenkung geladener Teilchen in RF Separatoren benutzt)
- 2.) $\vec{\nabla}_\perp E_z = 0$ and $\vec{\nabla}_\perp H_z = 0$: **transversale TEM Wellen**

b) Fall $k_c^2 \neq 0$:

Keine Ausbreitung für $\omega \leq c \cdot k_c$: evaneszente Wellen \leftrightarrow "cut-off"

E 106 Hohlraumresonatoren (Cavities)

Phasengeschwindigkeit aus Dispersionsrelation:

$$v_{ph} = c \cdot \sqrt{1 + \frac{k_c^2}{k^2}} > c$$

Die Impedanz hängt von der Ausbreitungsmode ab:

- 1.) $E_z = 0$: TE (transversal elektrische) oder H (weil $H_z \neq 0$) Wellen

Impedanz über $ik\vec{E}_\perp = -i\omega\mu_0\vec{H}_\perp \times \hat{e}_z$:

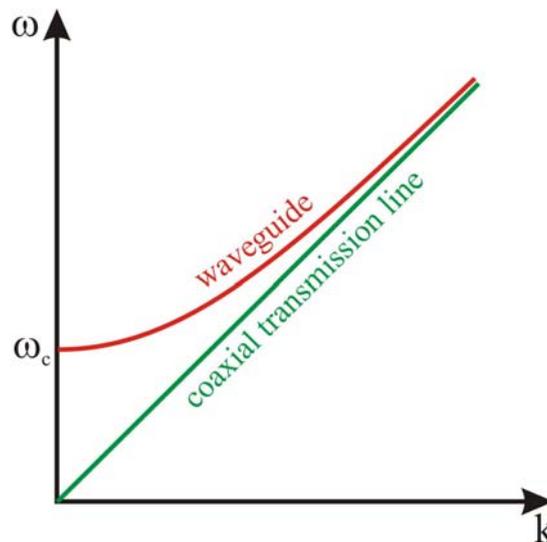
$$Z_0 = \frac{E_\perp}{H_\perp} = \mu_0 \frac{\omega}{k}$$

- 2.) $H_z = 0$: TM (transversal magnetische) oder E (weil $E_z \neq 0$) Wellen

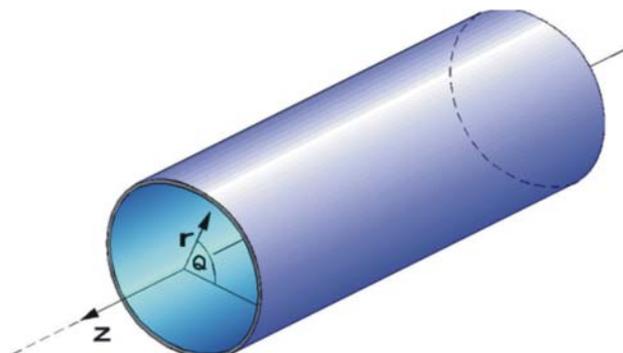
Impedanz über $ik\vec{H}_\perp \times \hat{e}_z = (i\omega\epsilon_0 + \sigma)\vec{E}_\perp$:

$$Z_0 = \frac{k}{\omega\epsilon_0}$$

Verbunden mit der kritischen Wellenzahl ist eine kritische Frequenz $\omega_c = k_c \cdot c$, unterhalb derer keine Wellenausbreitung im Hohlleiter stattfindet. Die Dispersion im Hohlleiter weicht daher von der im Vakuum oder einem Koaxialkabel (TEM-Wellen) für kleine Frequenzen deutlich ab:



Betrachten wir nun im Folgenden zylindrische Hohlleiter mit Innenradius a :



E 106 Hohlraumresonatoren (Cavities)

Die longitudinalen Felder müssen die Wellengleichung lösen:

$$\underbrace{\left(\frac{\partial^2}{\partial r^2} + \frac{1}{r} \frac{\partial}{\partial r} + \frac{1}{r^2} \frac{\partial^2}{\partial \varphi^2} \right)}_{=\Delta_{\perp}} E_z + k_c^2 E_z = 0$$

$$\underbrace{\left(\frac{\partial^2}{\partial r^2} + \frac{1}{r} \frac{\partial}{\partial r} + \frac{1}{r^2} \frac{\partial^2}{\partial \varphi^2} \right)}_{=\Delta_{\perp}} H_z + k_c^2 H_z = 0$$

Separation des φ -abhängigen Anteils

$$E_z(r, \varphi) = R_E(r) \cdot \theta_E(\varphi), \quad H_z(r, \varphi) = R_H(r) \cdot \theta_H(\varphi)$$

$$\Rightarrow \frac{r^2}{R} \cdot \frac{d^2 R}{dr^2} + \frac{r}{R} \frac{dR}{dr} + k_c^2 r^2 = -\frac{1}{\theta} \frac{d^2 \theta}{d\varphi^2} = m^2$$

ergibt zwei Differentialgleichungen für die Anteile der longitudinalen Komponente und als Lösung die trigonometrischen Funktionen für den Winkelanteil und die Bessel- bzw. Neumannfunktion für den radialen Anteil:

$$\begin{aligned} \frac{d^2 \theta}{d\varphi^2} + m^2 \theta &= 0 & \rightarrow & \theta(\varphi) = A \cdot \cos(m\varphi) + B \cdot \sin(m\varphi) \\ \frac{d^2 R}{dr^2} + \frac{1}{r} \frac{dR}{dr} + \left(k_c^2 - \frac{m^2}{r^2} \right) R &= 0 & \rightarrow & R(r) = C \cdot J_m(k_c \cdot r) + D \cdot N_m(k_c \cdot r) \end{aligned}$$

Mit $\vec{\nabla}_{\perp} = \hat{e}_r \frac{\partial}{\partial r} + \hat{e}_{\varphi} \frac{1}{r} \frac{\partial}{\partial \varphi}$ erhalten wir für die transversalen Felder:

$$\begin{aligned} ik_c^2 \vec{E}_{\perp} &= k \left\{ \frac{\partial E_z}{\partial r} \hat{e}_r + \frac{1}{r} \frac{\partial E_z}{\partial \varphi} \hat{e}_{\varphi} \right\} - \omega \mu_0 \left\{ \frac{\partial H_z}{\partial r} \hat{e}_{\varphi} - \frac{1}{r} \frac{\partial H_z}{\partial \varphi} \hat{e}_r \right\} \\ ik_c^2 \vec{H}_{\perp} &= k \left\{ \frac{\partial H_z}{\partial r} \hat{e}_r + \frac{1}{r} \frac{\partial H_z}{\partial \varphi} \hat{e}_{\varphi} \right\} + \omega \varepsilon_0 \left\{ \frac{\partial E_z}{\partial r} \hat{e}_{\varphi} - \frac{1}{r} \frac{\partial E_z}{\partial \varphi} \hat{e}_r \right\} \end{aligned}$$

Die möglichen Feldverteilungen werden durch die Randbedingungen an den Wänden des Hohlleiters weiter eingeschränkt:

- $E_{\varphi} = 0; E_z = 0$ für $r = a$ (verschwindende Tangentialkomponenten)
- $H_r = 0$ für $r = a$ (verschwindende Normalkomponenten)

E 106 Hohlraumresonatoren (Cavities)

Hiermit wird einem folgender Ansatz für das magnetische (im Fall der TE-Moden) bzw. das elektrische Feld (im Fall der TM-Moden) nahegelegt:

TE- oder H-Wellen mit $E_z = 0$:

$H_z = H_{mn} \cdot J_m(k_c \cdot r) \cdot \cos(m\varphi)$, wobei $J'_m(k_c a) = 0$ gelten muss und n angibt, um welche Nullstelle j'_{mn} es sich dabei handelt. Mit $n = 1, 2, 3, \dots$ und $m = 0, 1, 2, \dots$

gilt näherungsweise folgende **Dispersionsrelation für TE-Wellen**:

$$k_c^2 + k^2 = \frac{\omega^2}{c^2} \quad \text{wobei} \quad (k_c a)^2 \approx \left(n + \frac{2m-3}{4} \right)^2 \pi^2 - \frac{4m^2 + 3}{4}$$

Wir erhalten damit für die transversalen Felder der TE-Wellen:

$$\begin{aligned} E_r &= i \frac{\omega \mu_0}{k_c} \frac{m}{k_c r} \cdot J_m(k_c r) \cdot \sin(m\varphi) H_{mn} & H_r &= -i \frac{k}{k_c} \cdot J'_m(k_c r) \cdot \cos(m\varphi) H_{mn} \\ E_\varphi &= i \frac{\omega \mu_0}{k_c} \cdot J'_m(k_c r) \cos(m\varphi) H_{mn} & H_\varphi &= i \frac{k}{k_c} \frac{m}{k_c r} \cdot J_m(k_c r) \cdot \sin(m\varphi) H_{mn} \end{aligned}$$

Die Mode mit der kleinsten Frequenz (Fundamentalmode) ist die TE₁₁ mit $m > 0$, was durch die Forderung verschwindender Normalkomponenten von H bedingt ist! Allgemein gilt für die Cut-Off-Frequenzen $\omega_{mn} = j'_{mn} \cdot c / a$.

TM- oder E-Wellen mit $H_z = 0$:

$E_z = E_{mn} \cdot J_m(k_c \cdot r) \cdot \cos(m\varphi)$, wobei $J_m(k_c a) = 0$ gelten muss und n angibt, um welche Nullstelle j_{mn} es sich dabei handelt. Mit $n = 1, 2, 3, \dots$ und $m = 0, 1, 2, \dots$

gilt Näherungsweise folgende **Dispersionsrelation für TM-Wellen**:

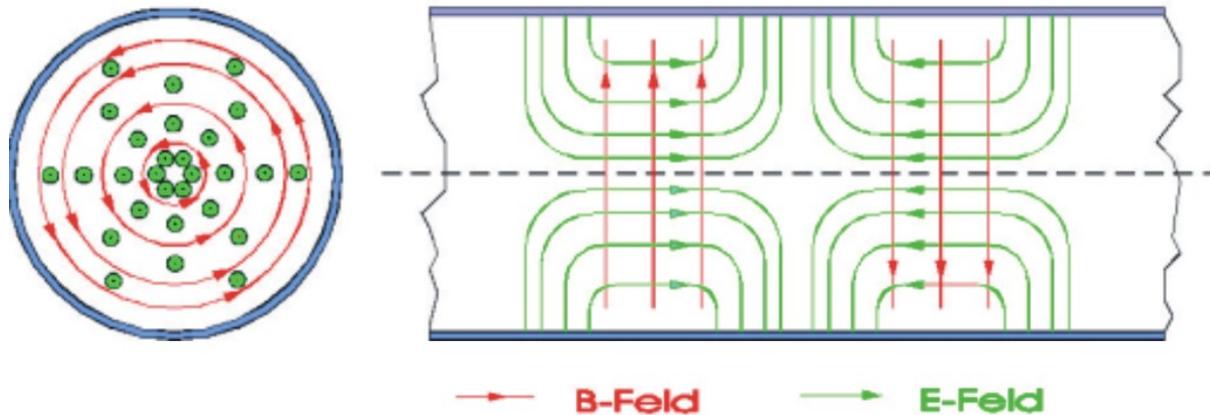
$$k_c^2 + k^2 = \frac{\omega^2}{c^2} \quad \text{mit} \quad (k_c a)^2 \approx \left(n + \frac{2m-1}{4} \right)^2 \pi^2 - \frac{4m^2 - 1}{4}$$

Wir erhalten damit für die transversalen Felder der TM-Wellen:

$$\begin{aligned} E_r &= -i \frac{k}{k_c} \cdot J'_m(k_c r) \cdot \cos(m\varphi) E_{mn} & H_r &= i \frac{\omega \varepsilon_0}{k_c} \frac{m}{k_c r} \cdot J_m(k_c r) \cdot \sin(m\varphi) E_{mn} \\ E_\varphi &= i \frac{k}{k_c} \frac{m}{k_c r} \cdot J_m(k_c r) \cdot \sin(m\varphi) E_{mn} & H_\varphi &= i \frac{\omega \varepsilon_0}{k_c} \cdot J'_m(k_c r) \cos(m\varphi) E_{mn} \end{aligned}$$

E 106 Hohlraumresonatoren (Cavities)

Die Fundamentalmode ist die TM_{01} mit $m=0$ und $n=1$, $E_\varphi = H_r = 0$:



Die TM_{01} wird in Linearbeschleunigern und Beschleunigungsresonatoren zur Beschleunigung geladener ultrarelativistischer Teilchen verwendet.

Für die Cut-Off-Frequenzen gilt: $\omega_{mn} = j_{mn} \cdot c/a$

1.3. Eigenmoden zylindrischer Resonatoren

Fügen wir in den Hohlleiter eine senkrecht zur z -Richtung stehende leitende Platte ein, wird die einlaufende Welle vollständig reflektiert und wir erhalten eine stehende Welle. Dies ändert die Abhängigkeit der Felder in z -Richtung:

$$a \cdot e^{ikz} \rightarrow A \cdot \sin(kz + \varphi_0)$$

An den Knotenebenen können daher ohne Veränderung der Feldverteilung leitende Platten eingefügt werden. Dies führt zu einem zylindrischen Hohlraumresonator, bestehend aus einem Hohlleiter der Länge l , der an seinen beiden Enden durch leitende Platten verschlossen ist. Für die longitudinalen Randbedingungen ist daher $k = p \cdot \pi/l$ zu fordern. Mit den o. a. Hohlleiter-Eigenmoden ergeben sich damit folgende longitudinale Felder:

TE_{mnp}-Moden: $H_z = H_{mn} \cdot J_m(k_c r) \cdot \cos(m\varphi) \cdot \sin(p\pi/l \cdot z) \cdot e^{i\omega_{mnp}t}$

TM_{mnp}-Moden: $E_z = E_{mn} \cdot J_m(k_c r) \cdot \cos(m\varphi) \cdot \cos(p\pi/l \cdot z) \cdot e^{i\omega_{mnp}t}$

Für die Resonanzfrequenzen gilt: $\omega_{mnp} = c \cdot \sqrt{(j_{mn}^{(0)}/a)^2 + (p\pi/l)^2}$

E 106 Hohlraumresonatoren (Cavities)

Die zur expliziten Berechnung der Resonanzfrequenzen erforderlichen Nullstellen der Besselfunktionen bzw. deren jeweiliger erster Ableitung finden sich in den folgenden beiden Tabellen:

Nullstellen von $J_m(x)$:

| n | j_{0n} | j_{1n} | j_{2n} | j_{3n} | j_{4n} | j_{5n} |
|----------|----------|----------|----------|----------|----------|----------|
| | - | 0 | 0 | 0 | 0 | 0 |
| 1 | 2,40482 | 3,83171 | 5,13562 | 6,38016 | 7,58834 | 8,77148 |
| 2 | 5,52007 | 7,01559 | 8,41724 | 9,76102 | 11,06471 | 12,33860 |
| 3 | 8,65372 | 10,17347 | 11,61984 | 13,01520 | 14,37254 | 15,70017 |
| 4 | 11,79153 | 13,32369 | 14,79595 | 16,22347 | 17,61597 | 18,98013 |
| 5 | 14,93091 | 16,47063 | 17,95982 | 19,40942 | 20,82693 | 22,21780 |

Nullstellen von $J'_m(x)$:

| n | j'_{0n} | j'_{1n} | j'_{2n} | j'_{3n} | j'_{4n} | j'_{5n} |
|----------|-----------|-----------|-----------|-----------|-----------|-----------|
| | 0 | - | 0 | 0 | 0 | 0 |
| 1 | 3,83170 | 1,84118 | 3,05424 | 4,20119 | 5,31755 | 6,41562 |
| 2 | 7,01558 | 5,33144 | 6,70613 | 8,01524 | 9,28240 | 10,51986 |
| 3 | 10,17346 | 8,53632 | 9,96947 | 11,34592 | 12,68191 | 13,98719 |
| 4 | 13,32369 | 11,70600 | 13,17037 | 14,58585 | 15,96411 | 17,31284 |
| 5 | 16,47063 | 14,86359 | 16,34752 | 17,78875 | 19,19603 | 20,57551 |

Die jeweils niedrigste Nullstelle (außer der trivialen) ist farblich markiert, aus ihr berechnet sich die jeweilige Fundamentalmode der beiden Modenklassen. Die Gleichheit der Nullstellen j'_{0n} und j_{1n} deutet darauf hin, dass die Ableitung der Besselfunktion nullter Ordnung mit der Besselfunktion erster Ordnung übereinstimmt:

$$\frac{d}{dx} J_0(x) = J_1(x).$$

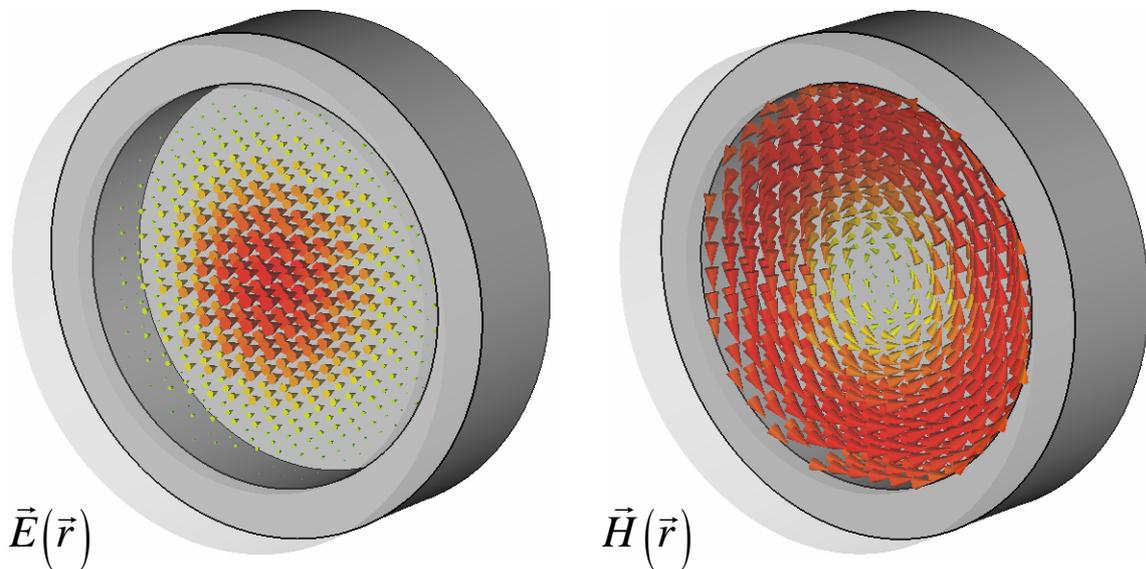
Die entsprechenden TE- bzw. TM-Moden weisen daher die gleiche Resonanzfrequenz auf:

$$\text{TE}_{0np} = \text{TM}_{1np} \text{ für beliebige Werte von } n \text{ und } p.$$

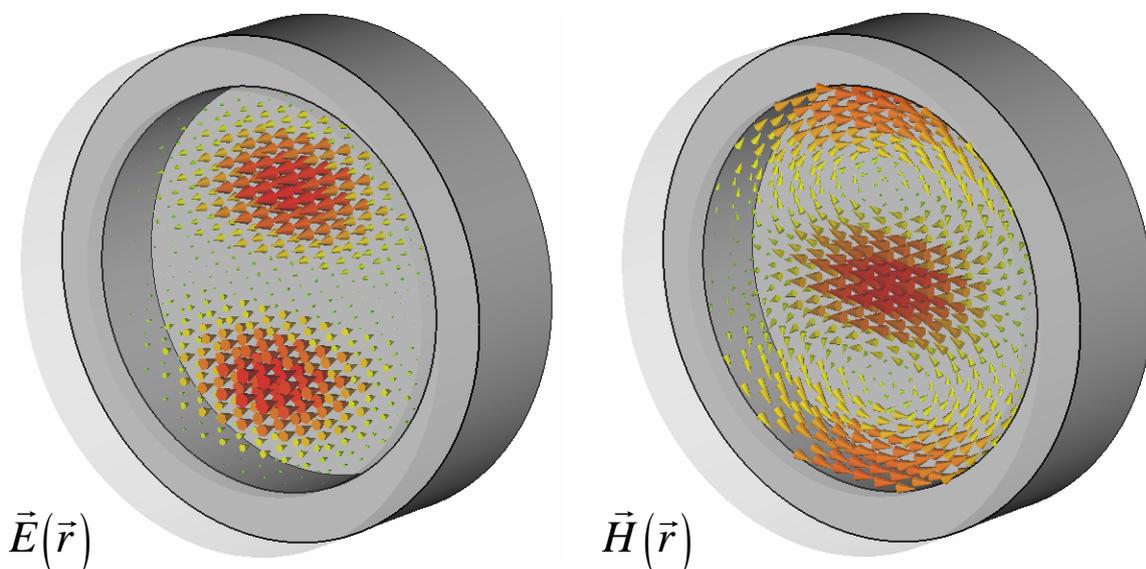
E 106 Hohlraumresonatoren (Cavities)

Die folgenden Abbildungen zeigen eine Momentaufnahme der Feldverteilungen der ersten beiden TM-Moden eines abgeschlossenen, zylindrischen Resonators, weitere Beispiele finden sich im Anhang. Wegen $p = 0$ besteht bei beiden Moden keine Abhängigkeit von der Resonatorlänge, das elektrische Feld hat damit nur eine longitudinale Komponente. Für die Abbildung wurde der Resonator jenseits einer willkürlich gewählten Schnittebene transparent dargestellt.

TM₀₁₀-Mode



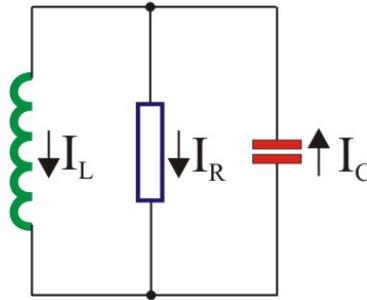
TM₁₁₀-Mode



2. Das Cavity als Schwingkreis

2.1. Definition der Kenngrößen im unbelasteten Fall

Wir betrachten das Ersatzschaltbild eines Hohlraumresonators – den LCR-Parallelkreis:



Es gelten die bestens bekannten Beziehungen:

Spannungen: $-U_C = U_R = U_L$, $C \cdot \dot{U}_C = I$, $U_L = L \cdot \dot{I}$ (Generator!)

Ströme: $I_C = I_R + I_L$

Dies ergibt die Differentialgleichung

$$\ddot{U} + \frac{1}{RC} \dot{U} + \frac{1}{LC} U = 0$$

Wir definieren folgende Größen:

- Zeitkonstante

$$\tau = R \cdot C$$

- Resonanz-Kreisfrequenz

$$\omega_0 = \frac{1}{\sqrt{L \cdot C}}$$

- Kreisgüte

$$Q_0 = \frac{2\pi \cdot \text{gespeicherte Energie}}{\text{Energieverlust pro Periode}} = \frac{2\pi \cdot W}{T \cdot P} = \frac{\omega_0 \cdot W}{P}$$

Als Lösung ergibt sich für einen schwach gedämpften Kreis (Schwingfall)

$$U(t) = U_0 \cdot e^{-\frac{t}{2\tau}} \cdot e^{i(\omega_0 t + \varphi_0)}$$

Für die gespeicherte Energie ergibt sich

E 106 Hohlraumresonatoren (Cavities)

$$W = \frac{1}{2} C \cdot |U|^2 = \frac{1}{2} \cdot e^{-\frac{t}{\tau}} \cdot C \cdot U_0^2,$$

der Energieverlust (dissipierte Leistung) beträgt

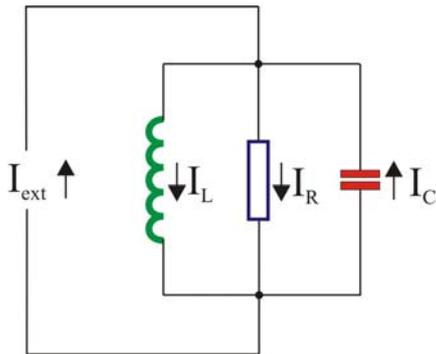
$$P = \dot{W} = -\frac{1}{\tau} \cdot W$$

und damit erhalten wir für die Kreisgüte die altbekannten Beziehungen

$$Q_0 = \frac{\omega_0 \cdot W}{P} = \omega_0 \cdot \tau = \omega_0 RC = \frac{R}{\omega_0 L}$$

2.2. Erzwungene Schwingungen

Wir regen den Schwingkreis mit einer externen Stromquelle an und erhalten



Spannungen: $-U_C = U_R = U_L$

Ströme: $I_C + I_{ext} = I_R + I_L$

$$I_C = \dot{Q}_C = C \cdot \dot{U}_C$$

$$I_R = U_R / R$$

$$\dot{I}_L = U_L / L$$

$$\ddot{U} + \frac{\omega_0}{Q_0} \cdot \dot{U} + \omega_0^2 \cdot U = \frac{1}{C} \dot{I}_{ext}$$

Wir setzen für die externe Anregung $I_{ext} = \hat{I}_{ext} \cdot e^{i\omega t}$ und erhalten mit dem Ansatz

$U = \hat{U} \cdot e^{i\omega t}$ die inhomogene komplexe Lösung:

$$\hat{U} = \frac{i\omega \hat{I}_{ext} / C}{\omega_0^2 - \omega^2 + \frac{i\omega\omega_0}{Q_0}}$$

Nach Einsetzen der Beziehung für die Kreisgüte ergibt sich folgendes wohlbekanntes Resultat:

E 106 Hohlraumresonatoren (Cavities)

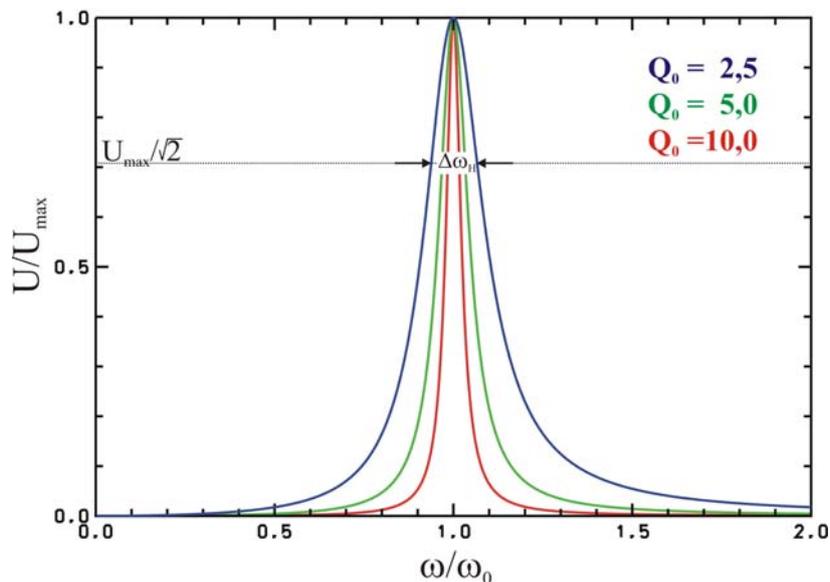
$$\hat{U} = \frac{R \cdot \hat{I}_{ext}}{1 + iQ_0 \left(\frac{\omega}{\omega_0} - \frac{\omega_0}{\omega} \right)} \stackrel{\Delta\omega \ll \omega_0}{\approx} \frac{R \cdot \hat{I}_{ext}}{1 + 2iQ_0 \frac{\Delta\omega}{\omega}}$$

woraus sich für Betrag und Phasenverschiebung Folgendes ergibt:

$$|\hat{U}| = \frac{R \cdot \hat{I}_{ext}}{\sqrt{1 + Q_0^2 \left(\frac{\omega}{\omega_0} - \frac{\omega_0}{\omega} \right)^2}} \stackrel{\Delta\omega \ll \omega_0}{\approx} \frac{R \cdot \hat{I}_{ext}}{\sqrt{1 + 4Q_0^2 \left(\frac{\Delta\omega}{\omega} \right)^2}}$$

$$\tan \varphi = Q_0 \left(\frac{\omega_0}{\omega} - \frac{\omega}{\omega_0} \right) \stackrel{\Delta\omega \ll \omega_0}{\approx} -2Q_0 \frac{\Delta\omega}{\omega}$$

Die Abhängigkeit der Spannung von der Frequenz wird durch die Resonanzkurve dargestellt und hat folgende Form (ideale Spule $\Rightarrow \omega_r = \omega_0$!)

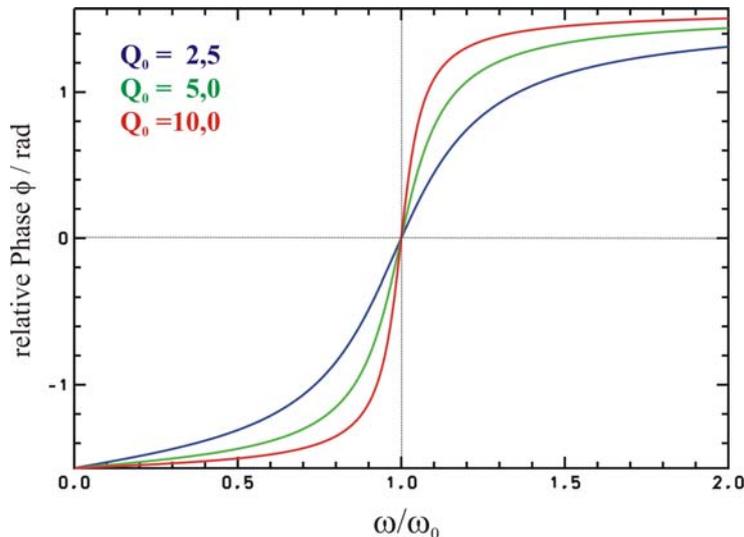


Die unbelastete Kreisgüte kann auf einfache Weise durch Messung der so genannten Halbwertsbreite $\Delta\omega_H$ aus der Resonanzkurve bestimmt werden (was durch Einsetzen in die Beziehung für $|\hat{U}|$ einfach verifiziert werden kann):

$$Q_0 = \frac{\omega_0}{\Delta\omega_H}, \quad \Delta\omega_H = \text{volle Halbwertsbreite bei } \frac{U_{\max}}{\sqrt{2}}$$

E 106 Hohlraumresonatoren (Cavities)

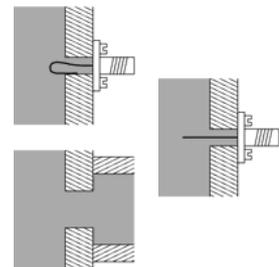
Der Phasenverlauf zeigt einen Nulldurchgang der relativen Phase bei ω_0



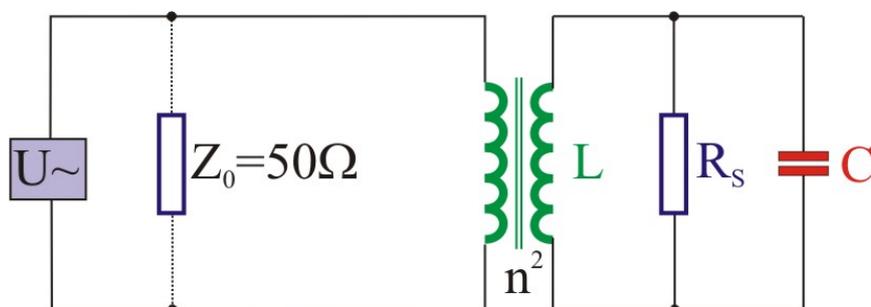
2.3. Belasteter Fall durch Einkopplung von Hochfrequenz

Es gibt im Wesentlichen drei verschiedene Möglichkeiten, Hochfrequenz in einen Hohlraumresonator einzukoppeln:

- Kopplung an das magnetische Feld (Schleifenkopplung)
- Kopplung an das elektrische Feld (Stiftkopplung)
- Einkopplung aus dem Hohlleiter (Schlitzkopplung)



Wir wollen uns im Folgenden auf eine magnetische Einkopplung beschränken, die anderen Einkopplungen können völlig analog behandelt werden. Im Fall der Schleifenkopplung ergibt sich folgendes Szenario im Ersatzschaltbild:



Ziel der Einkopplung ist es, die vom Generator erzeugten Mikrowellen möglichst vollständig (d.h. reflexionsfrei) in den Resonator zu bringen. Dazu muss die Leitung vom Generator zum Resonator mit ihrem Wellenwiderstand (Impe-

E 106 Hohlraumresonatoren (Cavities)

danz typ. 50Ω) abgeschlossen werden. Die Impedanz des Resonators ist eine komplexe Größe und nur im Resonanzfall reell. Sie wird dann als so genannte Shuntimpedanz R_s bezeichnet:

$$Z(\omega_0) = R_s = \text{reell}$$

Die Größenordnung beträgt typischerweise $M\Omega$! Daher wird sie durch die Schleifenkopplung zu $Z_a = R_s/n^2$ herab transformiert; im Ersatzschaltbild entspricht dies einem Transformator mit Wicklungsverhältnis n . Für die Reflexion ist das Verhältnis aus Abschlusswiderstand und Leitungsimpedanz maßgebend. Wir definieren daher als Koppelfaktor

$$\kappa = \frac{Z_a}{Z_0} = \frac{R_s}{n^2 \cdot Z_0}$$

Der Resonator wird durch die externe Leitung zusätzlich belastet:

$$\frac{1}{R} = \frac{1}{R_s} + \frac{1}{n^2 \cdot Z_0} \quad \Rightarrow \quad \frac{1}{Q} = \frac{1}{Q_0} + \frac{1}{Q_{\text{ext}}}$$

und die unbelastete Kreisgüte sinkt durch das zusätzliche Auftreten einer externen Güte Q_{ext} auf den Wert Q . Formal erhalten wir durch Einbeziehung der externen Verlustleistung P_{ext} folgende Zusammenhänge:

$$Q_{\text{ext}} = \frac{\omega_0 \cdot W}{P_{\text{ext}}} \quad \Rightarrow \quad Q = \frac{\omega_0 \cdot W}{P + P_{\text{ext}}}$$
$$\kappa = \frac{Q_0}{Q_{\text{ext}}} = \frac{P_{\text{ext}}}{P} = \frac{R_s}{n^2 \cdot Z_0}$$

Wir unterscheiden die 3 Fälle

- $\kappa < 1$: **unterkritische Kopplung**, $Q > Q_0/2$
- $\kappa = 1$: **kritische Kopplung**, $Q = Q_0/2$, **keine Reflexion!**
- $\kappa > 1$: **überkritische Kopplung**, $Q < Q_0/2$

E 106 Hohlraumresonatoren (Cavities)

Bei Kenntnis des Koppelfaktors kann die unbelastete Güte Q_0 aus der gemessenen belasteten Güte Q errechnet werden:

$$Q_0 = (1 + \kappa) \cdot Q$$

3. Der komplexe Reflexionsfaktor

3.1. Abhängigkeit vom Leitungsabschluss

Im Fall einer Reflexion haben wir eine hinlaufende (\hat{U}_+ , \hat{I}_+) und eine rücklaufende (\hat{U}_- , \hat{I}_-) Welle auf der Leitung. Wir definieren den komplexen Reflexionsfaktor ρ durch das Verhältnis

$$\rho = \frac{\hat{U}_-}{\hat{U}_+}$$

Am Abschlusswiderstand Z_a und der Leitungsimpedanz Z_0 haben wir dann

$$Z_a = \frac{\hat{U}}{\hat{I}} = \frac{\hat{U}_+ + \hat{U}_-}{\hat{I}_+ + \hat{I}_-}, \quad Z_0 = \frac{\hat{U}_+}{\hat{I}_+} = \frac{\hat{U}_-}{-\hat{I}_-}$$

und erhalten nach Einsetzen des Reflexionsfaktors ρ_0 am Leitungsende

$$Z_a = \frac{1 + \rho_0}{1 - \rho_0} \cdot Z_0 \quad \Leftrightarrow \quad \rho_0 = \frac{Z_a - Z_0}{Z_a + Z_0} = \frac{(Z_a/Z_0) - 1}{(Z_a/Z_0) + 1}$$

3.2. Reflexion in der Nähe einer isolierten Resonanz

Im Fall nicht überlappender Resonanzen (den wir hier ausschließlich betrachten wollen) ist uns die Impedanz des Resonators bekannt (vgl. Kapitel 2.2.). Wir erhalten mit

$$Z_{\text{Cav}} = \frac{R_S}{1 + iQ_0 \left(\frac{\omega}{\omega_0} - \frac{\omega_0}{\omega} \right)} \stackrel{\Delta\omega \ll \omega_0}{\approx} \frac{R_S}{1 + 2iQ_0 \frac{\Delta\omega}{\omega}}$$

E 106 Hohlraumresonatoren (Cavities)

und unter Einbeziehung des Koppelfaktors

$$\frac{Z_a}{Z_0} = \frac{Z_{cav}}{n^2 \cdot Z_0} = \kappa \frac{Z_{cav}}{R_s} \stackrel{\Delta\omega \ll \omega_0}{\approx} \frac{\kappa}{1 + 2iQ_0 \frac{\Delta\omega}{\omega}}$$

Damit ergibt sich für den komplexen Reflexionsfaktor in Abhängigkeit der Frequenzverschiebung $\Delta\omega$ von der Resonanzfrequenz ω_0 :

$$\rho_0(\Delta\omega) = \frac{\kappa - \left(1 + 2iQ_0 \frac{\Delta\omega}{\omega}\right)}{\kappa + \left(1 + 2iQ_0 \frac{\Delta\omega}{\omega}\right)}$$

Dies gilt natürlich nur unmittelbar an der Resonatoreinkopplung. Wird der Reflexionsfaktor in einer Entfernung l von der Einkopplung (bedingt durch das Verbindungskabel zwischen Messbrücke und Resonatoreinkopplung) gemessen, addiert sich der doppelte Laufzeitfaktor der Welle im Kabel. Mit der Wellenzahl

$$k = \frac{\omega}{v_{ph}} = \omega \cdot \sqrt{L' \cdot C'}$$

die von den Kabeleigenschaften (Induktivität L' bzw. Kapazität C' pro Länge) **und von der Frequenz (!)** abhängt, ergibt sich unter Vernachlässigung der Leitungsverluste (aufpassen bei Hohlleitern, da ist das Ganze abhängig von der angeregten Mode!)

$$\rho(\Delta\omega) = \rho_0(\Delta\omega) \cdot e^{-2ikl} = \frac{\kappa - \left(1 + 2iQ_0 \frac{\Delta\omega}{\omega}\right)}{\kappa + \left(1 + 2iQ_0 \frac{\Delta\omega}{\omega}\right)} \cdot e^{-2ikl}$$

In Anbetracht der großen Kreisgüten ($Q_0 = 1000 - 10000$) wollen wir aber diesen Effekt im Folgenden erst einmal vernachlässigen – er ist jedoch bei größerem Frequenzhub sehr schön auf dem Oszi bei der vektoriellen Messung des Reflexionsfaktors zu beobachten und führt zu Kreisen mit annähernd konstantem Radius, die in der Auswertung zur Normierung herangezogen werden.

4. Messung von $|\rho|$

4.1. Die „Resonanzkurve“

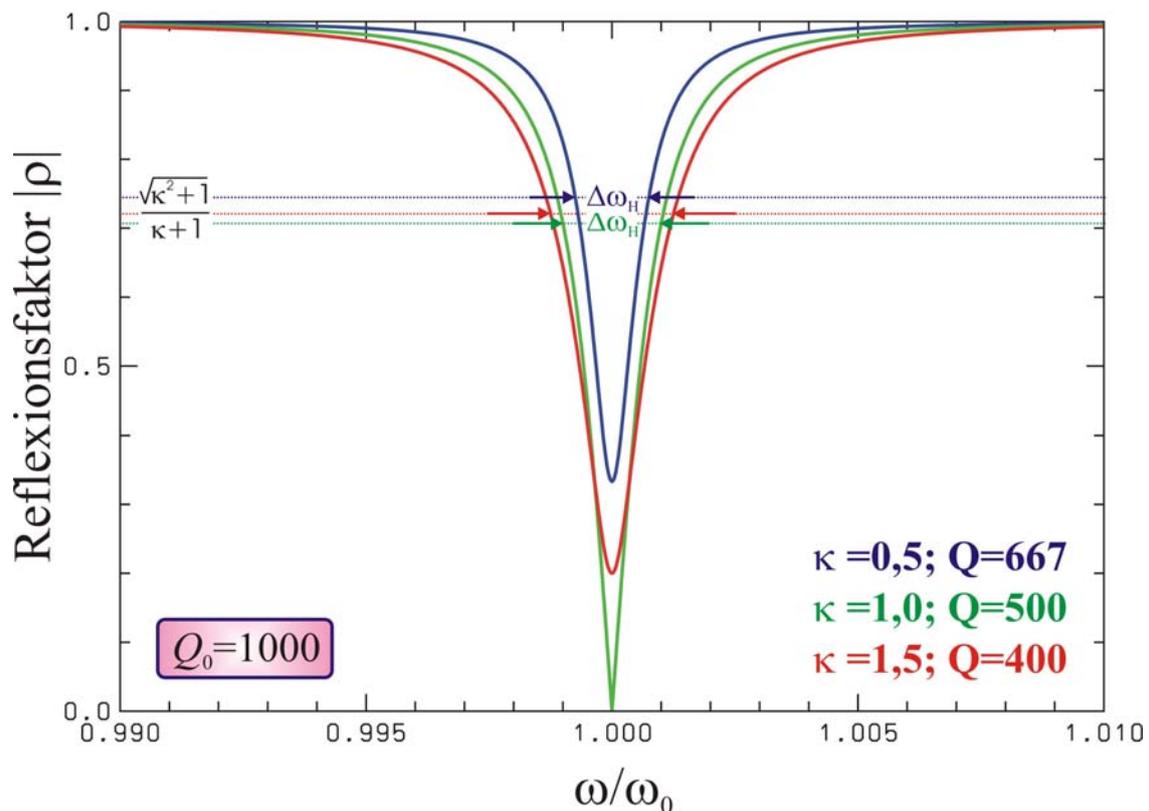
Durch Aufspaltung in Real- und Imaginärteil erhalten wir für den komplexen Reflexionsfaktor am Ort der Einkopplung

$$\rho_0(\Delta\omega) = \frac{(\kappa^2 - 1) - 4Q_0^2 \left(\frac{\Delta\omega}{\omega}\right)^2 - 4i\kappa Q_0 \frac{\Delta\omega}{\omega}}{(\kappa + 1)^2 + 4Q_0^2 \left(\frac{\Delta\omega}{\omega}\right)^2}$$

und nach Bildung des Betrages ergibt sich

$$|\rho(\Delta\omega)| = |\rho_0(\Delta\omega)| = \sqrt{\frac{(\kappa - 1)^2 + 4Q_0^2 \left(\frac{\Delta\omega}{\omega}\right)^2}{(\kappa + 1)^2 + 4Q_0^2 \left(\frac{\Delta\omega}{\omega}\right)^2}}$$

Auf einem Skalaren Netzwerkanalysator sieht man dann folgende Darstellung des Reflexionsfaktors (und dies gilt exakt, da die Kabellängen bei der Berechnung für eine verlustlose Leitung herausfliegen):



E 106 Hohlraumresonatoren (Cavities)

4.2. Bestimmung der Resonanzfrequenz und der Kopplung

Im Fall der Resonanz ($\Delta\omega = 0$) wird die Reflexion minimal. Die Resonanzfrequenz ω_0 wird abgelesen, indem man mit den Cursor-Funktionen das Minimum des Reflexionsfaktors sucht. Die Kopplung erhält man aus

$$|\rho(\Delta\omega = 0)| = \left| \frac{\kappa - 1}{\kappa + 1} \right| \quad \Rightarrow \quad \kappa = \begin{cases} (1 + |\rho|)/(1 - |\rho|), & \rho > 0 \\ (1 - |\rho|)/(1 + |\rho|), & \rho < 0 \end{cases}$$

wobei leider nicht zwischen $\rho > 0$ bzw. $\rho < 0$ unterschieden werden kann. Achtung: Eine präzise Messung von $|\rho|$ erfordert einen kalibrierten Analysator!!

4.3. Bestimmung der Kreisgüte

Für die belastete Güte gilt

$$Q = \frac{Q_0}{1 + \kappa} = \frac{\omega_0}{\Delta\omega_H} \quad \xrightarrow{\Delta\omega_H = 2\Delta\omega} \quad \frac{\Delta\omega}{\omega} \approx \frac{1 + \kappa}{2Q_0}$$

da die entsprechende Frequenzverschiebung nur die Hälfte der Halbwertsbreite beträgt! Wir erhalten damit für den Reflexionsfaktor

$$|\rho(\Delta\omega_H/2)| = \sqrt{\frac{(\kappa - 1)^2 + (\kappa + 1)^2}{(\kappa + 1)^2 + (\kappa + 1)^2}} = \frac{\sqrt{\kappa^2 + 1}}{\kappa + 1}$$

und damit folgende wichtige Botschaft:

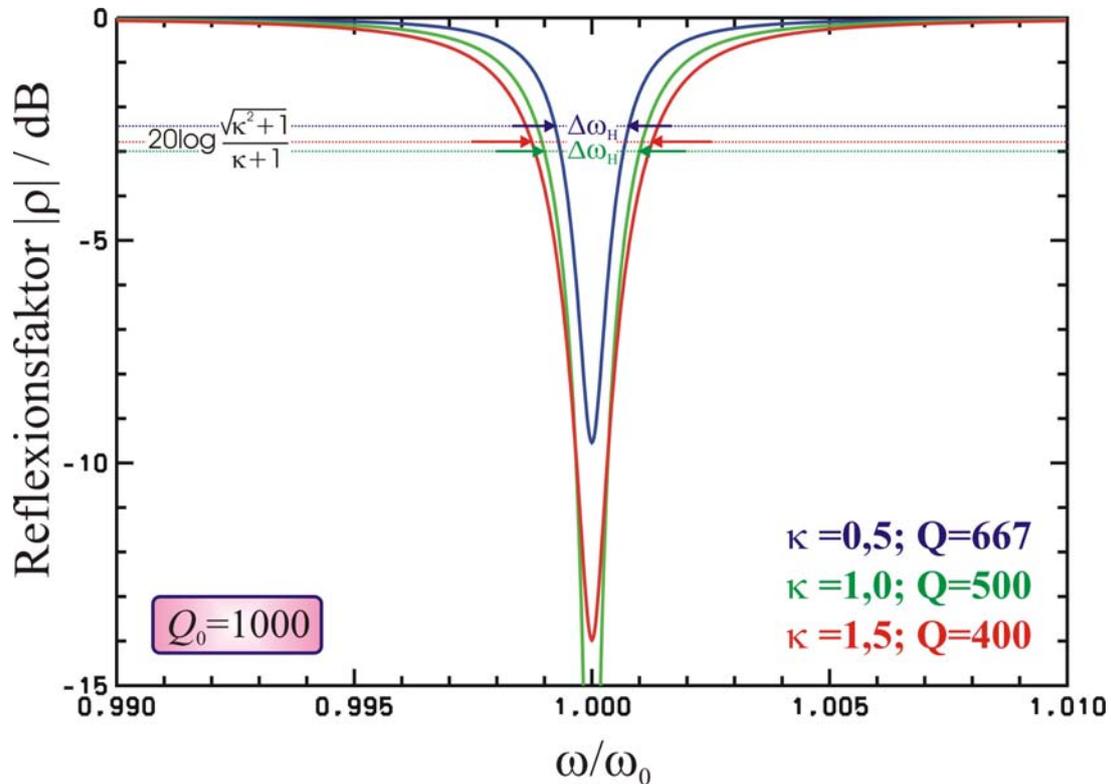
Nur im Fall $\kappa=1$ misst man zur Bestimmung der Kreisgüte die volle 3dB-Halbwertsbreite – dies entspricht $\rho = 1/\sqrt{2}$ wegen der Leistungsdefinition der dB-Werte ($\text{dB} = 20 \cdot \log(U/U_0)$), in allen anderen Fällen muss bei

$$|\rho(\Delta\omega_H/2)| = \frac{\sqrt{\kappa^2 + 1}}{\kappa + 1} \neq \frac{1}{\sqrt{2}}$$

die volle Halbwertsbreite bestimmt werden (vgl. die lin/log-Abbildungen)!

E 106 Hohlraumresonatoren (Cavities)

Eine Resonanz mit einer Kreisgüte $Q_0=1000$ und unterschiedlichen Ankopplungen ($\kappa=0,5; 1; 1,5$) sähe in einer logarithmischen Darstellung dann folgendermaßen aus:



5. Vektorielle Messung des Reflexionsfaktors

5.1. Die „Resonanzkurve“ in der komplexen Ebene

Wir erhielten für den komplexen Reflexionsfaktor folgenden Ausdruck:

$$\rho(\Delta\omega) = \frac{(\kappa^2 - 1) - 4Q_0^2 \left(\frac{\Delta\omega}{\omega}\right)^2 - 4i\kappa Q_0 \frac{\Delta\omega}{\omega}}{(\kappa + 1)^2 + 4Q_0^2 \left(\frac{\Delta\omega}{\omega}\right)^2} \cdot e^{-2i\kappa l}$$

Vernachlässigen wir zunächst den Laufzeitfaktor $e^{-2i\kappa l}$ und tragen den Reflexionsfaktor in der komplexen Ebene auf, so beschreibt ρ_0 in der unmittelbaren Nähe der Resonanz einen Kreis um (x_0, y_0) mit dem Radius r

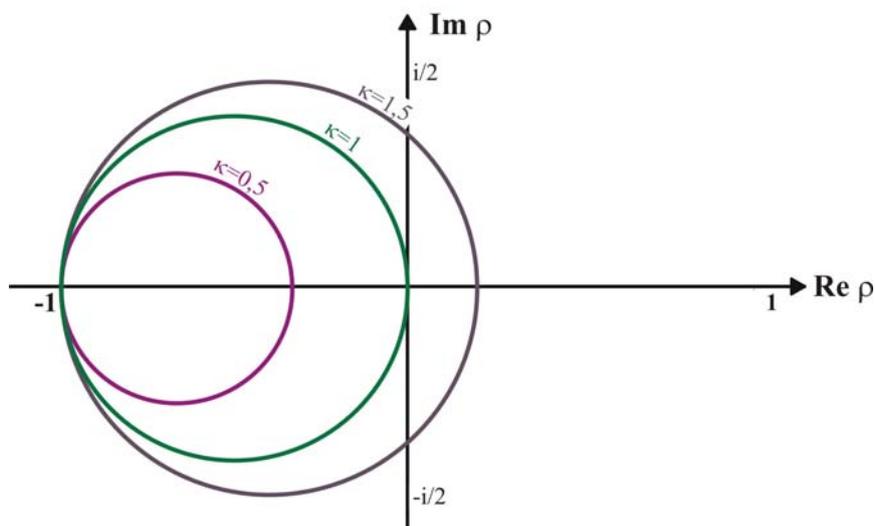
$$x_0 + iy_0 = -\frac{1}{1+\kappa}, \quad r = \frac{\kappa}{1+\kappa}$$

E 106 Hohlraumresonatoren (Cavities)

Dies kann in einer länglichen Rechnung durch Einsetzen von r und x_0 verifiziert werden, die hier nur auszugsweise zur Überprüfung wiedergegeben werden soll:

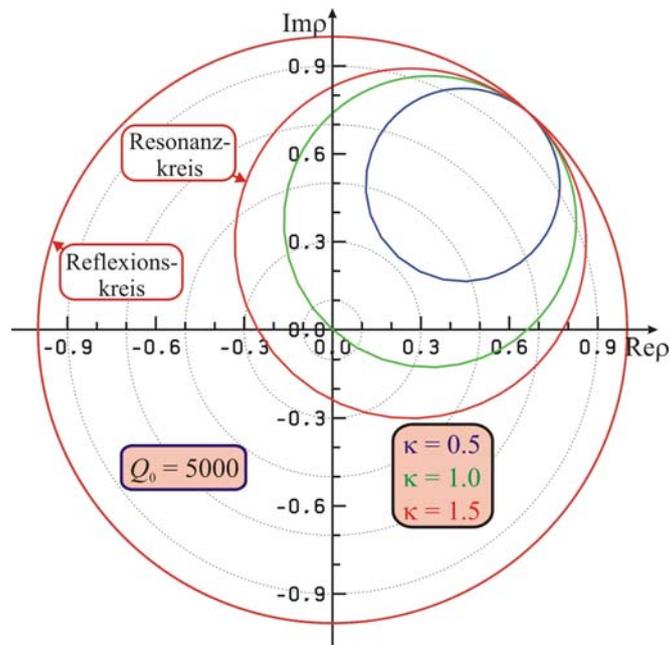
$$\begin{aligned}
 & \underbrace{\left[\frac{(\kappa^2 - 1) - 4Q_0^2 \left(\frac{\Delta\omega}{\omega}\right)^2}{(\kappa + 1)^2 + 4Q_0^2 \left(\frac{\Delta\omega}{\omega}\right)^2} + \frac{1}{1 + \kappa} \right]^2}_{(x-x_0)^2} + \underbrace{\left[\frac{4\kappa Q_0^2 \frac{\Delta\omega}{\omega}}{(\kappa + 1)^2 + 4Q_0^2 \left(\frac{\Delta\omega}{\omega}\right)^2} \right]^2}_{y^2} = \underbrace{\left[\frac{\kappa}{1 + \kappa} \right]^2}_{r^2} \\
 & \dots \\
 & \Leftrightarrow \left[\frac{\kappa(1 + \kappa) - \frac{4\kappa Q_0^2 \left(\frac{\Delta\omega}{\omega}\right)^2}{1 + \kappa}}{(1 + \kappa)^2 + 4Q_0^2 \left(\frac{\Delta\omega}{\omega}\right)^2} \right]^2 + \frac{16\kappa^2 Q_0^2 \left(\frac{\Delta\omega}{\omega}\right)^2}{\left[(1 + \kappa)^2 + 4Q_0^2 \left(\frac{\Delta\omega}{\omega}\right)^2 \right]^2} = \frac{\kappa^2}{(1 + \kappa)^2} \\
 & \dots \\
 & \Leftrightarrow \left[\frac{\kappa \cdot \left((1 + \kappa) + \frac{4Q_0^2 \left(\frac{\Delta\omega}{\omega}\right)^2}{1 + \kappa} \right)}{(1 + \kappa)^2 + 4Q_0^2 \left(\frac{\Delta\omega}{\omega}\right)^2} \right]^2 = \frac{\kappa^2}{(1 + \kappa)^2} \quad \text{q.e.d.}
 \end{aligned}$$

Radius und Position der Kreise sind also abhängig vom Koppelfaktor, hängen aber überhaupt nicht von der Kreisgüte ab! Unter Vernachlässigung des Laufzeitfaktors gehen alle Kreise durch den Punkt $(-1; 0)$, und wir erhalten:

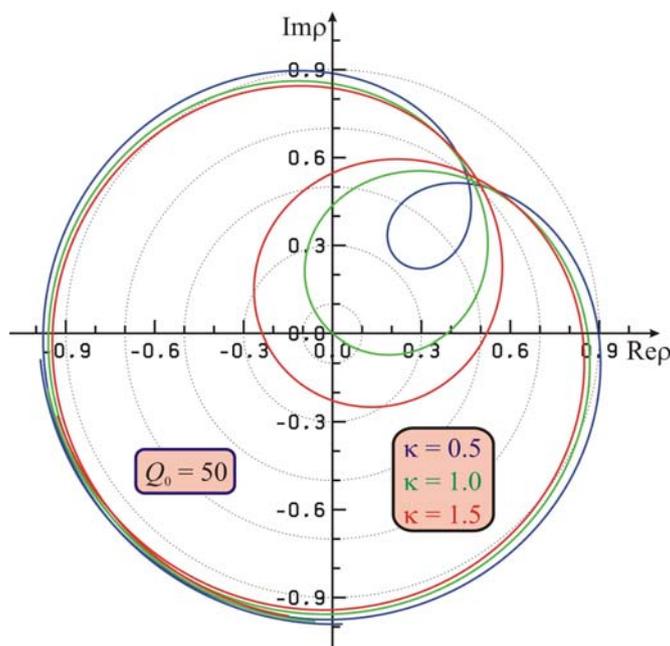


E 106 Hohlraumresonatoren (Cavities)

Durch den Laufzeitfaktor werden die Kreise um den Ursprung rotiert. Im Falle hoher Kreisgüten ist die Änderung der Kreisform durch den Laufzeitfaktor vernachlässigbar und wir erhalten z.B. folgendes Bild, in dem wir den eigentlichen „Resonanzkreis“ und den vom Laufzeitfaktor erzeugten „Reflexionskreis“ mit Radius 1 erkennen:



Im Fall niedriger Güten werden die Kreise durch den Laufzeitfaktor verbeult, und da die belastete Kreisgüte vom Koppelfaktor abhängt, ist auch die Deformation abhängig von der Kopplung; so z.B. für $\omega_0 = 3\text{GHz}$, $l = 2\text{m}$:



E 106 Hohlraumresonatoren (Cavities)

Da wir die vektorielle Messung im vorliegenden Aufbau (Phasendiskriminator) nicht kalibrieren können (dies geht nur bei sehr kostspieligen vektoriellen Analysatoren), müssen wir die Einflüsse des Laufzeitfaktors vernachlässigen. Sie haben bei der Ermittlung der Kenngrößen aufgrund der hohen Kreisgüten einen geringen Einfluss, der im Notfall durch Verkürzen der Zuleitungskabel weiter verringert werden kann.

5.2. Bestimmung der Resonanzfrequenz und der Kopplung

Bevor am Oszillographenschirm der Reflexionsfaktor bestimmt werden kann, muss zunächst der Ursprung des angezeigten Smith-Diagramms mit demjenigen der Oszillographenskala zur Deckung gebracht werden (Eichung).

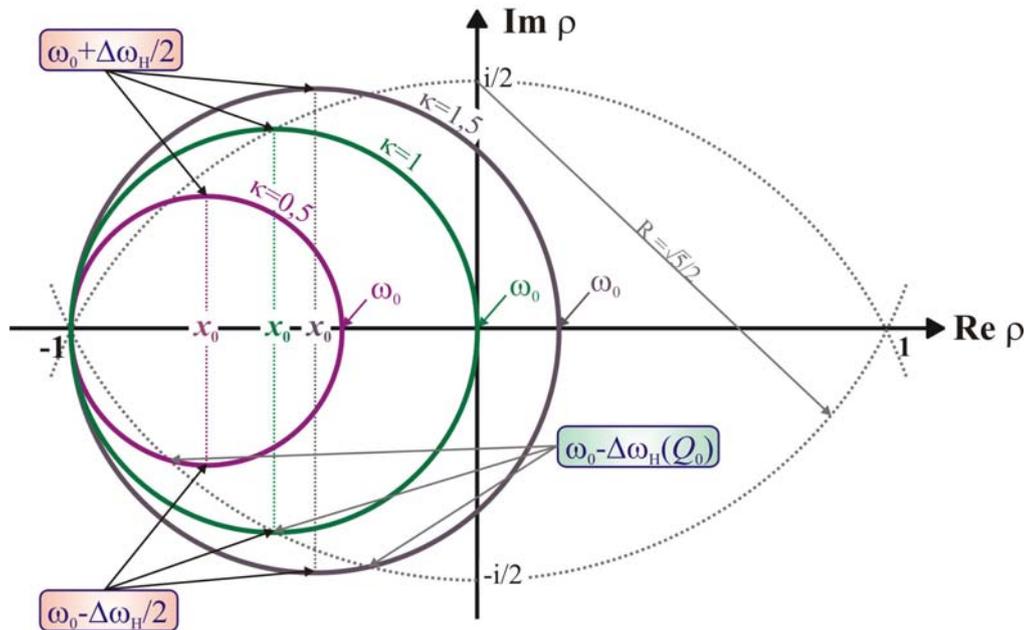
Dabei gibt es zwei Möglichkeiten:

- Man schafft einen Zustand, wo keine Wellen reflektiert werden, und erhält somit am Oszillographenschirm den Punkt für $\rho = 0$. Dazu steht ein 50 Ohm-Abschlusswiderstand zur Verfügung. In der Praxis gelingt der reflexionsfreie Abschluss nicht vollkommen, es empfiehlt sich daher, die Justage bei der Resonanzfrequenz vorzunehmen und vorher den Frequenzhub zu reduzieren.
- Man betrachtet den Zustand vollständiger Reflexion, also den Reflexionskreis mit $|\rho| = 1$. Dieser kann nun unter Zuhilfenahme der kreisförmigen Markierungen auf dem Oszillographenschirm zentriert werden.

Zur Bestimmung des Reflexionsfaktors in der Resonanz geht man dann folgendermaßen vor: Die durch den Laufzeitfaktor bedingte Drehung der Kreise um den Koordinatenursprung muss durch eine Drehung des Koordinatensystems ausgeglichen werden. Dazu lässt sich die Skala am Oszillographen um den Mittelpunkt drehen. Sie wird so eingestellt, dass der Berührungspunkt von Resonanzkreis und Reflexionskreis auf der Realteil-Achse liegt.

E 106 Hohlraumresonatoren (Cavities)

Im Resonanzfall ist die Impedanz des Resonators reell; die Ortskurve des komplexen Reflexionsfaktors muss daher die Realteil-Achse schneiden. Die entsprechende Frequenz ist die Resonanzfrequenz ω_0 .



Den Reflexionsfaktor in Resonanz $\rho(\Delta\omega = 0)$ kann man nun wie folgt bestimmen: Man liest sowohl den (je nach Kopplung mit einem Vorzeichen behafteten!) Abstand d des Resonanzpunktes vom Koordinatenursprung (entspricht ρ), als auch den für die Normierung benötigten Radius R des Reflexionskreises (entspricht $|\rho| = 1$) in Einheiten von Skalenteilen ab. Der Reflexionsfaktor ergibt sich dann aus dem Verhältnis der beiden Größen:

$$\rho(\Delta\omega = 0) = d/R.$$

Der Koppelfaktor wird dann gemäß

$$\kappa = (1 + \rho)/(1 - \rho)$$

ausgerechnet.

E 106 Hohlraumresonatoren (Cavities)

5.3. Bestimmung der Kreisgüte

Für die belastete Kreisgüte gilt – völlig analog zur skalaren Messung –

$$Q = \frac{Q_0}{1 + \kappa} = \frac{\omega_0}{\Delta\omega_H} \quad \overset{\Delta\omega_H = 2\Delta\omega}{\Rightarrow} \quad \frac{\Delta\omega}{\omega} \approx \frac{1 + \kappa}{2Q_0}$$

Setzen wir dies ein, erhalten wir für den Reflexionsfaktor

$$\rho_0(\pm\Delta\omega_H/2) = \frac{(\kappa^2 - 1) - (\kappa + 1)^2 \mp 2i\kappa(\kappa + 1)}{(\kappa + 1)^2 + (\kappa + 1)^2}$$

woraus sich nach einem Vergleich mit Kreismittelpunkt $(x_0; 0)$ und Kreisradius r

$$\rho_0(\pm\Delta\omega_H/2) = -\frac{1}{\kappa + 1} \mp i \frac{\kappa}{\kappa + 1} = x_0 \mp i \cdot r$$

ergibt. Zur Bestimmung der Halbwertsbreite wird der Resonanzkreis auf den Koordinatenursprung zentriert und der Frequenzvorschub beim Übergang vom unteren zum oberen Schnittpunkt mit der Imaginärteil-Achse gemessen.

Aus der vektoriellen Darstellung lässt sich auch unmittelbar die unbelastete Kreisgüte Q_0 ablesen. Setzen wir die Beziehung $Q_0 = \omega_0/\Delta\omega$ (diesmal aber mit der vollen Frequenzverschiebung!) in die Formel für ρ ein, erhalten wir

$$\rho_0(\pm\Delta\omega) = \frac{\kappa^2 - 5}{(\kappa + 1)^2 + 4} \mp i \frac{4\kappa}{(\kappa + 1)^2 + 4}$$

Diese Werte beschreiben in Abhängigkeit von κ einen Kreis mit Radius $r = \sqrt{5}/2$ um den Punkt $(0; i/2)$ bzw. $(0; -i/2)$, was wiederum durch Einsetzen verifiziert werden kann, z.B. für $y_0 = -1/2$:

$$\begin{aligned} & \left[\kappa^2 - 5 \right]^2 + \left[-4\kappa + \frac{1}{2} \left((\kappa + 1)^2 + 4 \right) \right]^2 = \frac{5}{4} \cdot \left[(\kappa + 1)^2 + 4 \right]^2 \\ \Leftrightarrow & \quad \kappa^4 - 10\kappa^2 + 25 + \frac{\kappa^4 + 20\kappa^3 + 110\kappa^2 + 100\kappa + 25}{4} = \frac{5}{4} \cdot \left[\kappa^4 + 4\kappa^3 + 14\kappa^2 + 20\kappa + 25 \right] \\ \Leftrightarrow & \quad \frac{5\kappa^4 + 20\kappa^3 + 70\kappa^2 + 100\kappa + 125}{4} = \frac{5}{4} \cdot \left[\kappa^4 + 4\kappa^3 + 14\kappa^2 + 20\kappa + 25 \right] \quad \text{q.e.d.} \end{aligned}$$

E 106 Hohlraumresonatoren (Cavities)

Man erhält daher die Frequenzverschiebung $\Delta\omega$ von der Resonanzfrequenz ω_0 und damit die volle Halbwertsbreite zur Bestimmung der unbelasteten Güte aus dem Schnittpunkt des Resonanzkreises mit einem der erwähnten Kreise um $(0; \pm i/2)$. Die unbelastete Güte wird dann über $Q_0 = \omega_0/\Delta\omega$ errechnet.

5.4. Weitere wichtige Größen und das Smith-Diagramm

Jede Mikrowellenleitung hat einen allgemeinen Wellenwiderstand Z_0 und ist an ihrem Ende mit irgendeinem Abschlusswiderstand Z_a abgeschlossen. Bei der Transformation des Abschlusswiderstands längs der Leitung (was sich formal als eine Multiplikation mit dem entsprechenden Laufzeitfaktor erweist) stellt sich heraus, dass dieser an ausgezeichneten Stellen reell wird. Daher geht man bei der Behandlung von Leitungen gerne von einem reellen Abschlusswiderstand aus, der ggf. in die gewünschte komplexe Impedanz längs der Leitung transformiert werden kann. Man definiert in diesem Zusammenhang die

Leitungsanpassung

$$m = \frac{1-|\rho|}{1+|\rho|} = \begin{cases} \left| \frac{Z_a}{Z_0} \right| = \kappa, & \text{für } Z_a < Z_0 \\ \left| \frac{Z_0}{Z_a} \right| = \frac{1}{\kappa}, & \text{für } Z_a > Z_0 \end{cases}$$

Bei der Ausbreitung von Mikrowellen treten für $Z_a \neq Z_0$ Reflexionen auf und folgende drei Kenngrößen sind dabei von besonderem Interesse:

1. relativer norm. Widerstand

$$z_s = \left| \frac{Z(s)}{Z_0} \right| \text{ an der Stelle } s \text{ der Leitung}$$

2. Reflexionsfaktor

$$\rho = \frac{Z_s - Z_0}{Z_s + Z_0} = \rho_0 \cdot e^{-i2ks} = \frac{\kappa - 1}{\kappa + 1} \cdot e^{-i2ks}$$

3. Stehwellenverhältnis

$$S = \frac{|\hat{U}_{\max}|}{|\hat{U}_{\min}|} = \frac{1+|\rho|}{1-|\rho|} = \frac{1}{m}$$

E 106 Hohlraumresonatoren (Cavities)

Andere Größen können dann auf einfache Weise aus diesen berechnet werden.

So ist zum Beispiel die im Abschlusswiderstand umgesetzte Wirkleistung P_A (d.h. in unserem Fall die im Resonator dissipierte Leistung) in Abhängigkeit der eingespeisten Leistung P_0 :

$$P_a = \frac{4S}{(1+S)^2} \cdot P_0$$

was man durch Einsetzen von $P_0 = P_+ = \frac{1}{2} |\hat{U}_+|^2 / |Z_0|$ und $P_- = \frac{1}{2} |\hat{U}_-|^2 / |Z_0|$ in

$P_a = P_+ - P_-$ erhält.

Zur Transformation der (relativen) Impedanzen längs der Leitung werden in die Darstellung des Reflexionsfaktors in der komplexen Ebene noch zusätzlich folgende Hilfslinien aufgenommen:

- **m – Kreise:** $m = \text{konst.} \leftrightarrow |\kappa| = \text{konst.}$
- **Realteilkreise:** $\text{Re}(z_s) = \text{Re}(Z_s/Z_0) = \text{konst.}$
- **Imaginärteilkreise:** $\text{Im}(z_s) = \text{Im}(Z_s/Z_0) = \text{konst.}$
- **l – „Kreise“:** $e^{-i2ks} = \text{konst.}$

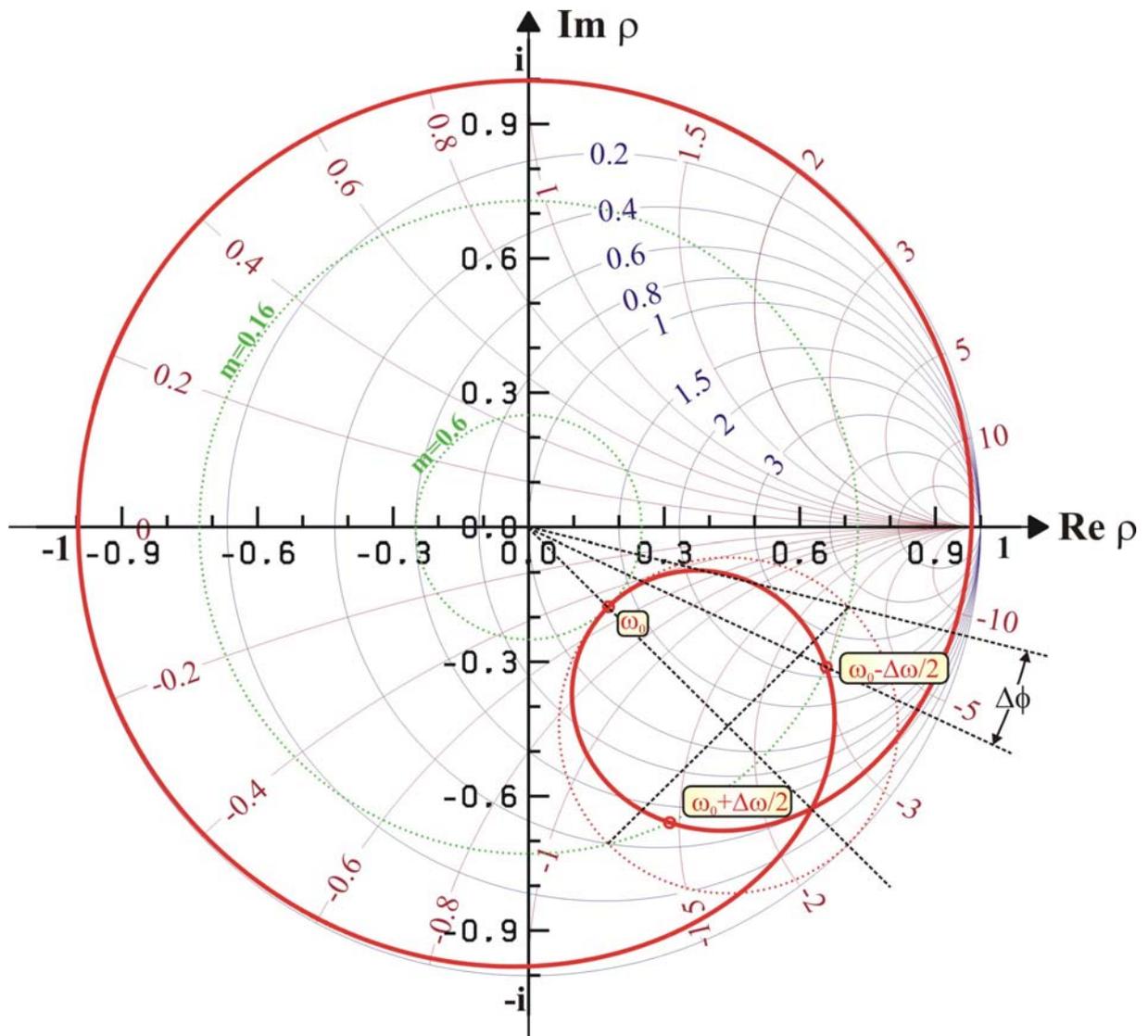
Durch Einsetzen der Beziehung für den komplexen Reflexionsfaktor in die entsprechenden Kreisgleichungen können folgende Kreisradien und -mittelpunkte leicht verifiziert werden:

- **m – Kreise:** $M = x_0 + i y_0 = 0, \quad r = \frac{1-m}{1+m}$
- **Realteilkreise:** $M = x_0 + i y_0 = \frac{\text{Re}(\kappa)}{\text{Re}(\kappa)+1}, \quad r = \frac{1}{\text{Re}(\kappa)+1}$
- **Imaginärteilkreise:** $M = x_0 + i y_0 = 1 + \frac{i}{\text{Im}(\kappa)}, \quad r = \frac{1}{\text{Im}(\kappa)}$
- **l – „Kreise“:** Geraden durch $x_0 + i y_0 = 0$ und $x_1 + i y_1 = e^{-i2ks}$

E 106 Hohlraumresonatoren (Cavities)

- Leitungslänge: $l = 981,25 \text{ mm} \hat{=} (9 + 13/16) \cdot \lambda_0$

und vereinfachend davon ausgehen, dass die Wellenlänge im Kabel gleich der Vakuumwellenlänge ist. Auf dem Oszillograph erscheint folgendes Bild:



Wir lesen aus dem Berührungspunkt mit dem m – Kreis den Koppelfaktor $\kappa = 0,6$ ab (für überkritische Kopplung ist der Wert $1/m$ zu verwenden) und bestimmen die zugehörige Resonanzfrequenz $\nu_0 = 3 \text{ GHz}$ am Frequenzgenerator. Aus dem Drehwinkel des Mittelpunkts des Resonanzkreises um den Koordinatenursprung erhalten wir die Leitungslänge bis auf ein Vielfaches von $\lambda/2$ (einmal herum entspricht einem Vorschub von $\lambda/2$); mit $\Delta\varphi = 225^\circ$ ergibt sich $l = 5/8 \cdot \lambda/2 \text{ mod}(\lambda/2)$. Bei der Bestimmung der Güte ist die Deformation des

E 106 Hohlraumresonatoren (Cavities)

Kreises durch den Laufzeitfaktor zu berücksichtigen. Wir zeichnen zunächst den idealen Resonanzkreis um den „Mittelpunkt“ des realen Resonanzkreises, bestimmen die Schnittpunkte auf dem Durchmesser senkrecht zur Verbindungslinie vom Mittelpunkt zum Ursprung und transformieren diese längs des schneidenden m – Kreises auf den Resonanzkreis. Dort lesen wir die jeweilige Frequenzverschiebung ab und erhalten aus der zugehörigen vollen Halbwertsbreite die belastete Güte $Q = 312,5$.

Man sieht hierbei sehr schön, dass im Falle moderater Kreisgüten und langer Leitungen die Bestimmung von Q aus den Schnittpunkten des Durchmessers mit dem realen Resonanzkreis zu kleine Werte von $\Delta\omega$ liefert!

Wir lernen dabei gleichzeitig, dass aus dem bei $\omega_0 \pm \Delta\omega/2$ vorliegenden m – Wert ($m \approx 0,16$) ein Stehwellenverhältnis $S = 1/m \approx 6,3$ resultiert und wir immerhin noch ca. die Hälfte der Leistung in den Resonator hineinbekommen. Die unbelastete Güte ergibt sich zu $Q_0 = (1 + \kappa) \cdot Q = 1,6 \cdot Q = 500$.

Aus der Verschiebung der Punkte bei $\omega_0 \pm \Delta\omega/2$ durch den Laufzeitfaktor lässt sich obendrein noch die vollständige Länge des Verbindungskabels bestimmen. Wir zeichnen die entsprechenden Verbindungsgeraden zwischen Ursprung und den Punkten $\omega_0 - \Delta\omega/2$ auf dem realen und idealen Resonanzkreis und erhalten als Zwischenwinkel $\Delta\phi = 11,3^\circ$. Dies entspricht mit

$$\Delta\phi = -2\Delta kl = -\frac{4\pi l}{\Delta\lambda} = -\frac{4\pi l}{\lambda_0} \cdot \frac{\lambda_0}{\Delta\lambda} = \frac{4\pi l}{\lambda_0} \cdot \frac{\Delta\omega}{\omega_0} = \frac{2\pi l}{\lambda_0} \cdot \frac{1 + \kappa}{Q_0}$$

$$\Leftrightarrow \boxed{l = \frac{\Delta\phi}{2\pi} \cdot \frac{Q_0}{1 + \kappa} \cdot \lambda_0 \approx 9,81 \cdot \lambda_0}$$

was unsere Verhältnisse recht gut trifft!

6. Störkörpermessungen

Zur Messung der elektrischen und magnetischen Felder innerhalb des Resonators (vorzugsweise auf der Achse) sind Antennen ungeeignet, da die erforderlichen Zuleitungen die Feldverteilung im Resonator stören würden. Daher wird durch Einbringen eines kleinen dielektrischen (bzw. leitenden) Körpers das elektrische (bzw. das elektrische und das magnetische) Feld innerhalb des Resonators am Ort des Körpers leicht verändert. Diese Veränderung bewirkt eine Verschiebung der Resonanzfrequenz ($\omega_0 \rightarrow \omega$) und bei unveränderter Anregung mit ω_0 eine Veränderung des Reflexionsfaktors. Beides kann gemessen und zur Bestimmung der Feldstärken herangezogen werden. Im Fall der Messung der Verschiebung der Resonanzfrequenz spricht man von der **resonanten Störkörpermethode** (da der Resonator dann weiterhin resonant angeregt wird), im Fall der Messung der Veränderung des Reflexionsfaktors bei unveränderter Anregung von der **nicht resonanten Störkörpermessung**. Zur Bestimmung der Shuntimpedanz ist eine Messung des elektrischen Feldes ausreichend. Diese erfolgt mithilfe eines dielektrischen Störkörpers, auf den hier vornehmlich eingegangen werden soll.

6.1. Slater-Formel

Wir unterscheiden im Folgenden zwischen den „ungestörten“ Feldern (d.h. bei ausgefahrenem Störkörper)

$$\vec{E}_0 \cdot e^{i\omega_0 t} \quad \text{und} \quad \vec{H}_0 \cdot e^{i\omega_0 t},$$

die sich bei der Anregung mit der originären Resonanzfrequenz ω_0 ergeben und den „gestörten“ Feldern (d.h. bei eingefahrenem Störkörper)

$$\vec{D} \cdot e^{i\omega t} = (\epsilon_0 \vec{E}_0 + \vec{P}) \cdot e^{i\omega t} \quad \text{und} \quad \vec{B} \cdot e^{i\omega t} = (\mu_0 \vec{H}_0 + \vec{M}) \cdot e^{i\omega t},$$

die bei der veränderten Resonanzfrequenz ω angeregt werden. Die zusätzliche Polarisation \vec{P} und Magnetisierung \vec{M} rühren vom Störkörper her.

E 106 Hohlraumresonatoren (Cavities)

Wir berechnen im Folgenden die Änderung der gespeicherten Energie. Dazu gehen wir von den Maxwell'schen Gleichungen im Resonator aus und erhalten im Innenraum des Resonators wegen $\vec{j} = 0$, $\rho = 0$

$$\begin{aligned}\vec{\nabla} \times \vec{H}_0 &= \varepsilon_0 \frac{\partial \vec{E}_0}{\partial t} = i\omega_0 \varepsilon_0 \vec{E}_0 & \rightarrow & \quad \vec{\nabla} \times \vec{H} = \frac{\partial \vec{D}}{\partial t} = i\omega \vec{D} \\ \vec{\nabla} \times \vec{E}_0 &= -\mu_0 \frac{\partial \vec{H}_0}{\partial t} = i\omega_0 \mu_0 \vec{H}_0 & \rightarrow & \quad \vec{\nabla} \times \vec{E} = -\frac{\partial \vec{B}}{\partial t} = -i\omega \vec{B}\end{aligned}$$

Multiplikation der ersten Gleichung mit \vec{E}_0^* und der zweiten mit \vec{H}_0^* , Ausnutzen der Operatoridentität $\vec{a} \cdot (\vec{\nabla} \times \vec{b}) = \vec{\nabla} \cdot (\vec{a} \times \vec{b}) + \vec{b} \cdot (\vec{\nabla} \times \vec{a})$ und Ersetzen der Rotation der ungestörten Felder durch ihre zeitliche Ableitung gemäß den linken Gleichungen ergibt:

$$\begin{aligned}\vec{\nabla} \cdot (\vec{H} \times \vec{E}_0^*) - i\omega_0 \mu_0 \vec{H}_0^* \cdot \vec{H} &= i\omega \vec{E}_0^* \cdot \vec{D} \\ \vec{\nabla} \cdot (\vec{E} \times \vec{H}_0^*) + i\omega_0 \varepsilon_0 \vec{E}_0^* \cdot \vec{E} &= i\omega \vec{H}_0^* \cdot \vec{B}\end{aligned}$$

Wir integrieren über den Innenraum des Resonators und erhalten durch Anwendung des Gauß'schen Satzes

$$\begin{aligned}\underbrace{\oint_{\partial V} (\vec{H} \times \vec{E}_0^*) \cdot d\vec{A} - i\omega_0 \mu_0 \iiint_V (\vec{H}_0^* \cdot \vec{H}) dV}_{=0} &= i\omega \iiint_V (\vec{E}_0^* \cdot \vec{D}) dV \\ \underbrace{\oint_{\partial V} (\vec{E} \times \vec{H}_0^*) \cdot d\vec{A} + i\omega_0 \varepsilon_0 \iiint_V (\vec{E}_0^* \cdot \vec{E}) dV}_{=0} &= i\omega \iiint_V (\vec{H}_0^* \cdot \vec{B}) dV\end{aligned}$$

Das Oberflächenintegral verschwindet aufgrund der Randbedingungen auf den leitenden Innenwänden des Resonators. Einsetzen der gestörten Felder ergibt

$$\begin{aligned}-\omega_0 \mu_0 \iiint_V (\vec{H}_0^* \cdot \vec{H}) dV &= \omega \varepsilon_0 \iiint_V (\vec{E}_0^* \cdot \vec{E}) dV + \omega \iiint_V (\vec{E}_0^* \cdot \vec{P}) dV \\ \omega_0 \varepsilon_0 \iiint_V (\vec{E}_0^* \cdot \vec{E}) dV &= -\omega \mu_0 \iiint_V (\vec{H}_0^* \cdot \vec{H}) dV - \omega \iiint_V (\vec{H}_0^* \cdot \vec{M}) dV\end{aligned}$$

Wir multiplizieren die erste Gleichung mit ω , die zweite mit ω_0 , subtrahieren beide voneinander und erhalten mit den Näherungen einer hohen Kreisgüte ($\omega\omega_0 \approx \omega^2$) und eines kleinen Störkörpervolumens ($\vec{E}_0^* \cdot \vec{E} \approx |E|^2$)

E 106 Hohlraumresonatoren (Cavities)

$$\frac{\omega_0^2 - \omega^2}{\omega^2} = \frac{\iiint_{V_s} (\vec{E}_0^* \cdot \vec{P} - \vec{H}_0^* \cdot \vec{M}) dV}{\varepsilon_0 \iiint_V |E_0|^2 dV} \approx 2 \frac{\Delta\omega}{\omega_0}$$

Wir müssen nur noch über das Volumen V_s des Störkörpers integrieren, da die Polarisation und Magnetisierung nur innerhalb des Störkörpers von Null verschieden sind. Im Nenner der so genannten Slater-Formel steht das doppelte der gespeicherten Energie W im Resonator, welche mittels der Beziehung zur Güte sowie zur Resonanzfrequenz berechnet werden kann, vgl. Kapitel 2.1 bzw. Kapitel 2.3.

6.2. Resonante Störkörpermessung

Im Fall eines kugelförmigen dielektrischen Störkörpers ist die Polarisation parallel und proportional zum elektrischen Feld. Hat der Störkörper eine kleine Dielektrizitätskonstante, kann in guter Näherung

$$\vec{P} = (\varepsilon - \varepsilon_0) \cdot \vec{E}_0, \quad \vec{M} = 0$$

gesetzt werden. Wir definieren die Störkörperkonstante α_s durch

$$\alpha_s = \frac{1}{2} \cdot (\varepsilon - \varepsilon_0) \cdot V_s$$

und erhalten die elektrische Feldstärke $E_0(z)$ an der Stelle z auf der Achse in Abhängigkeit der dort gemessenen Verschiebung $\Delta\omega(z)$ der Resonanzfrequenz:

$$E_0(z) = \sqrt{2 \cdot \frac{W}{\alpha_s} \cdot \frac{\Delta\omega(z)}{\omega_0}}$$

6.3. Nicht resonante Störkörpermessung

Regen wir den Resonator bei eingefahrenem Störkörper weiterhin auf der Frequenz ω_0 (und damit um $\Delta\omega$ von seiner Resonanzfrequenz entfernt) an, ändert sich der Reflexionsfaktor. Mit den Ergüssen aus Kapitel 4 erhalten wir:

$$\rho_0(\omega_0) = \frac{\kappa - 1}{\kappa + 1}, \quad \rho(\omega) = \frac{\kappa - \left(1 + 2iQ_0 \frac{\Delta\omega}{\omega_0}\right)}{\kappa + \left(1 + 2iQ_0 \frac{\Delta\omega}{\omega_0}\right)}$$

Wir messen demzufolge eine Veränderung des Reflexionsfaktors von

$$\Delta\rho = \rho - \rho_0 \approx \frac{4i\kappa Q_0}{(1 + \kappa)^2} \cdot \frac{\Delta\omega}{\omega_0}$$

und erhalten damit unter Einbeziehung der Ergebnisse der resonanten Störkörpermethode:

$$E_0(z) = \sqrt{\frac{(1 + \kappa)^2}{2\kappa Q_0} \cdot \frac{W}{\alpha_s} \cdot |\Delta\rho(z)|}$$

6.4. Bestimmung der Shuntimpedanz

Die Shuntimpedanz R_s wurde in Kapitel 2 anhand des Ersatzschaltbildes eines Hohlraumresonators als Schwingkreis eingeführt. Hierdurch ergibt sich folgender Zusammenhang zwischen Spannung U , Verlustleistung P_V und R_s :

$$R_s = \frac{U^2}{2P_V}$$

(Es muss warnend erwähnt werden, dass bei der Betrachtung von Linearbeschleunigern stets eine Definition ohne den Faktor 2 im Nenner verwendet wird; diese geht nicht von Effektivwerten aus und findet auch in der Diplomarbeit von *C. Peschke* sowie der Dissertation von *F.O. Müller* Anwendung!). Die Beschleunigungsspannung U erhält man durch Integration des elektrischen Feldes längs der Achse des Resonators:

E 106 Hohlraumresonatoren (Cavities)

$$U = \int_0^L E_0(z) \cdot dz$$

Bei der Bestimmung des Energiegewinns eines Teilchens muss zusätzlich die Änderung des elektrischen Feldes während der Laufzeit des Teilchens durch den Resonator berücksichtigt werden. Im Fall ultra-relativistischer Teilchen gilt $v \approx c$, wodurch sich die Zeitabhängigkeit $\cos(\omega t)$ durch $\cos(\frac{\omega z}{c})$ ausdrücken lässt. Dieser Effekt wird oft in der Shuntimpedanz berücksichtigt und wir erhalten dann

$$R_S = \frac{1}{P_V} \cdot \left| \int_{-L/2}^{L/2} E_0(s) \cdot \cos\left(\frac{\omega s}{c}\right) \cdot ds \right|^2$$

Er lässt sich auch durch den Laufzeitfaktor Λ ausdrücken:

$$\Lambda = \left| \frac{\int_{-L/2}^{L/2} E_0(s) \cdot \cos\left(\frac{\omega s}{c}\right) \cdot ds}{\int_{-L/2}^{L/2} E_0(s) \cdot ds} \right|^2$$

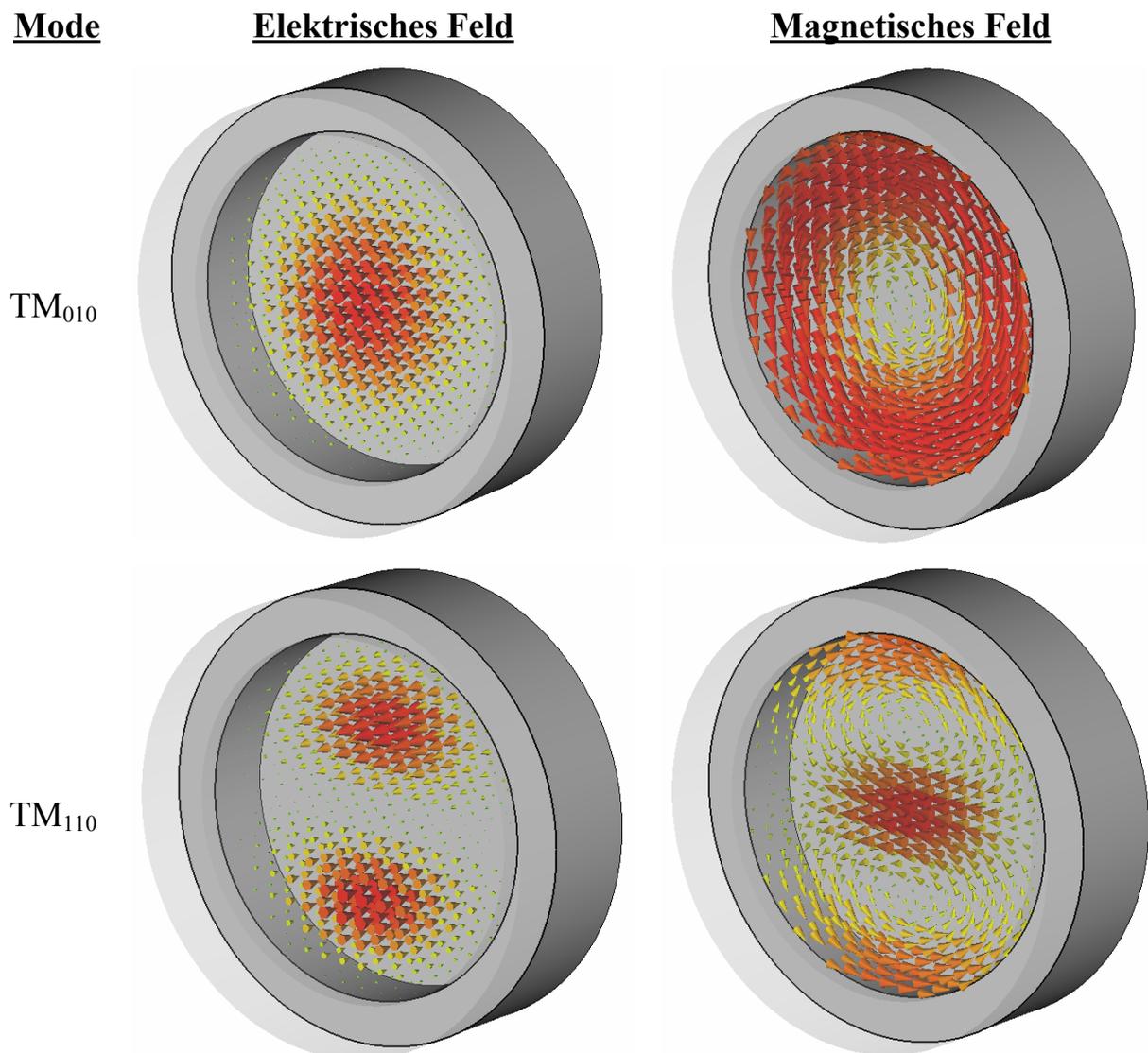
Da die Verlustleistung über die Kreisgüte mit der gespeicherten Energie verknüpft ist, muss diese für die Bestimmung von R_S nicht bekannt sein. Wir erhalten demzufolge:

| | |
|-----------------------------|---|
| a) resonante Methode: | $R_S = \Lambda \cdot \frac{2Q_0}{\omega_0^2 \cdot \alpha_S} \cdot \left \int_{-L/2}^{L/2} \sqrt{\Delta\omega(z)} \cdot dz \right ^2$ |
| b) nicht resonante Methode: | $R_S = \Lambda \cdot \frac{(1 + \kappa)^2}{2\omega_0 \kappa \alpha_S} \cdot \left \int_{-L/2}^{L/2} \sqrt{ \Delta\rho(z) } \cdot dz \right ^2$ |

7. Anhang

7.1. Feldplots einiger Resonatormoden

Die untenstehenden Abbildungen zeigen jeweils eine Momentaufnahme der Verteilung der elektrischen und magnetischen Felder für die ersten Resonatormoden (nicht nach Frequenzen geordnet), so wie sie sich aus einer Computersimulation (CST Microwave Studio) ergeben. Gerechnet wurde mit einem zylindrischen, abgeschlossenen Hohlraum, welcher die Abmessungen der im Versuch verwendeten Resonatoren aufweist. Für die Abbildung wurde der Resonator oberhalb einer willkürlich gewählten Schnittebene transparent dargestellt.



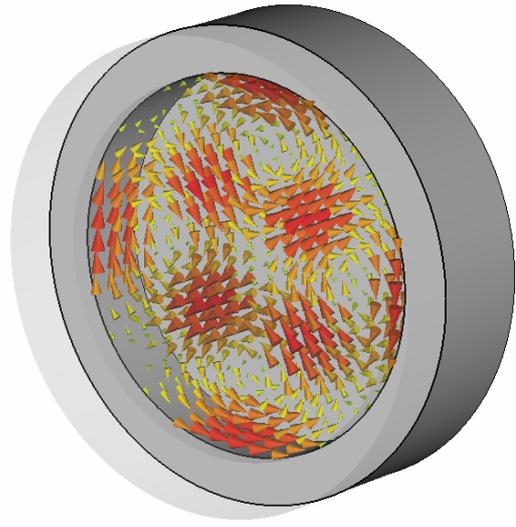
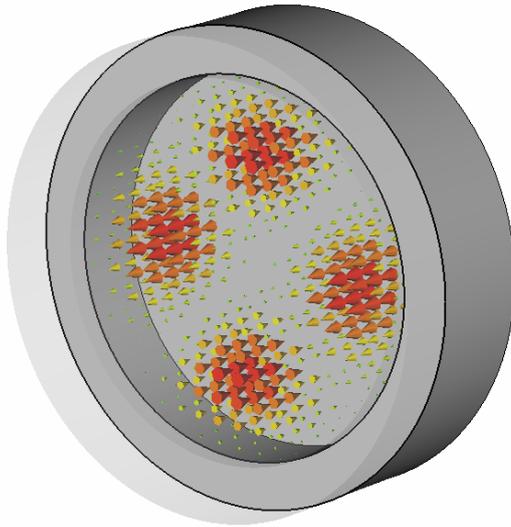
E 106 Hohlraumresonatoren (Cavities)

Mode

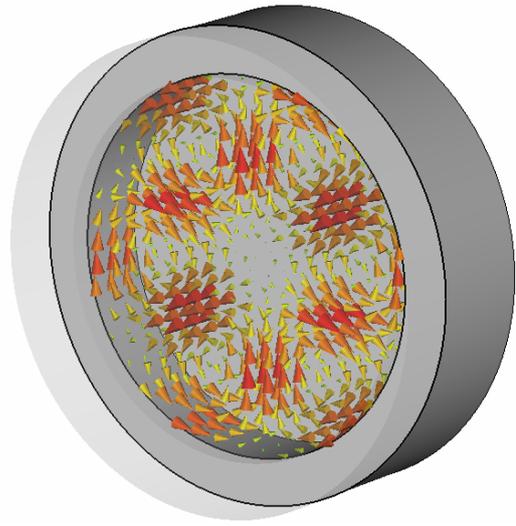
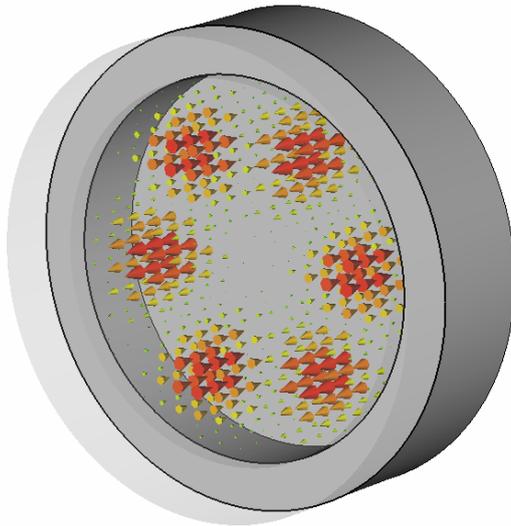
Elektrisches Feld

Magnetisches Feld

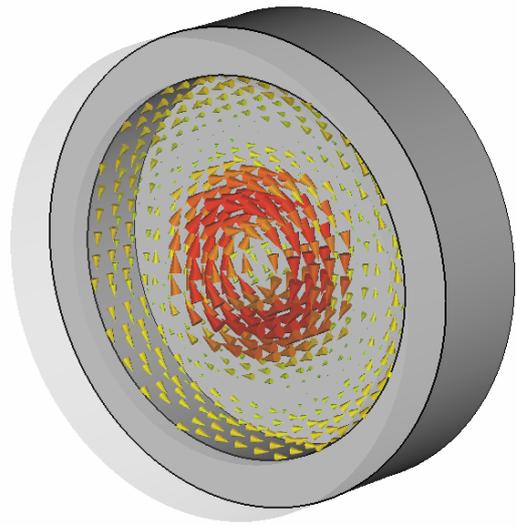
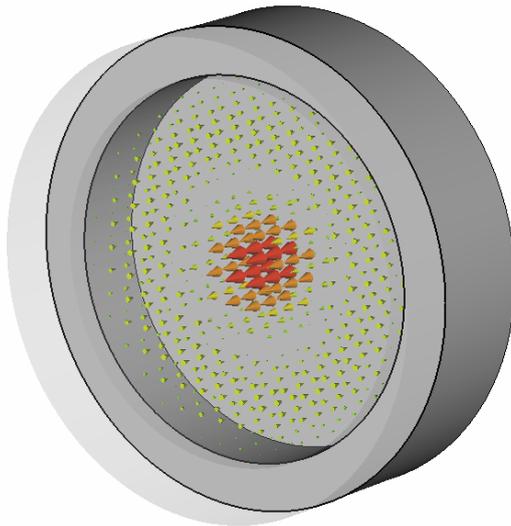
TM_{210}



TM_{310}



TM_{020}



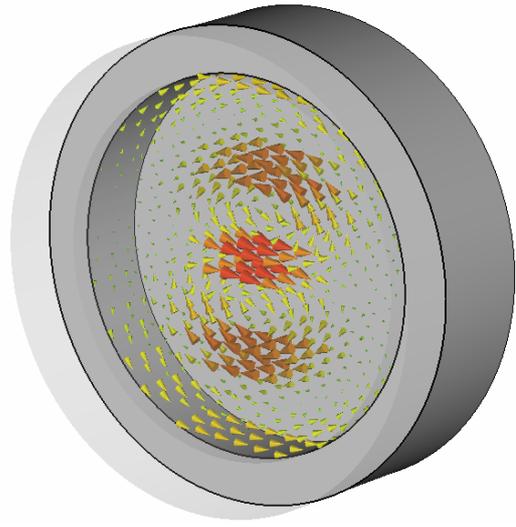
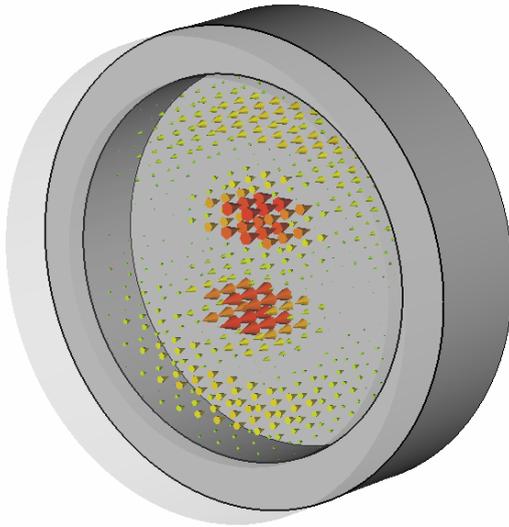
E 106 Hohlraumresonatoren (Cavities)

Mode

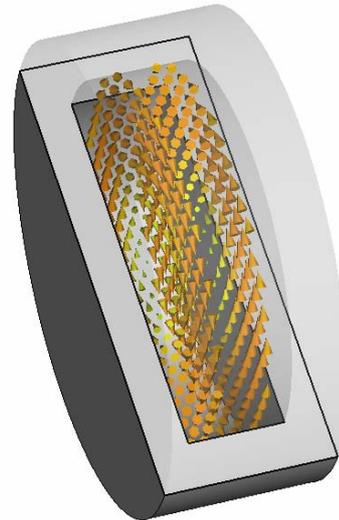
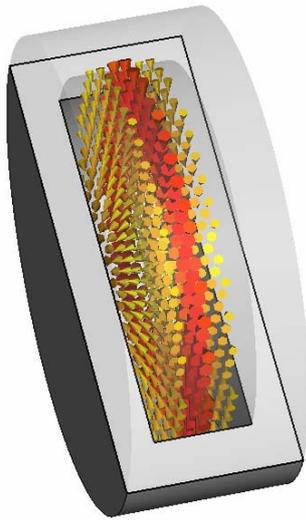
Elektrisches Feld

Magnetisches Feld

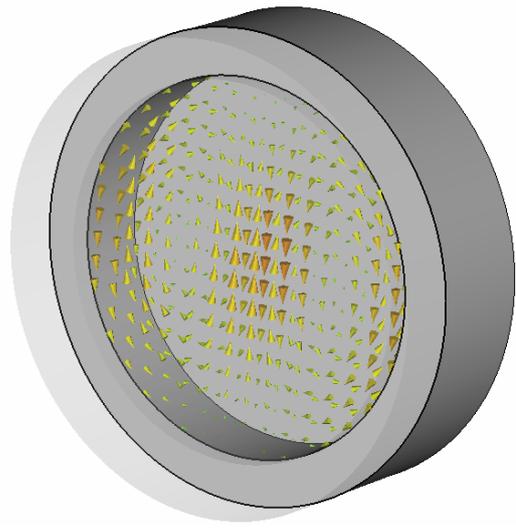
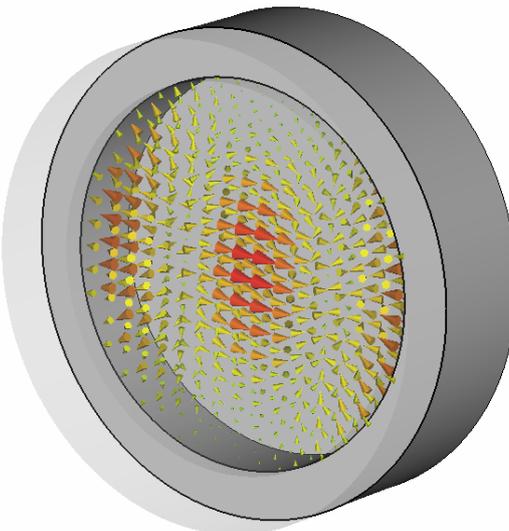
TM_{120}



TM_{011}



TM_{111}



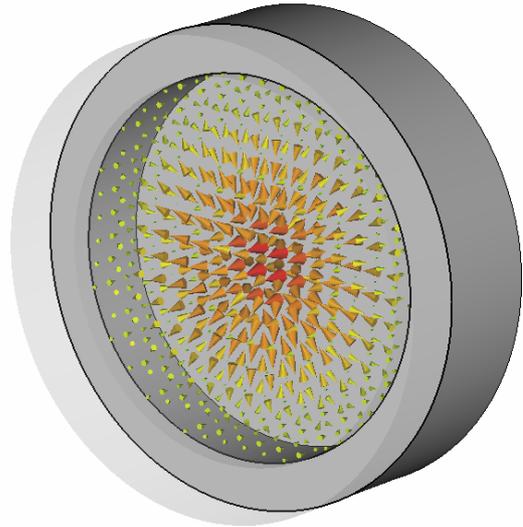
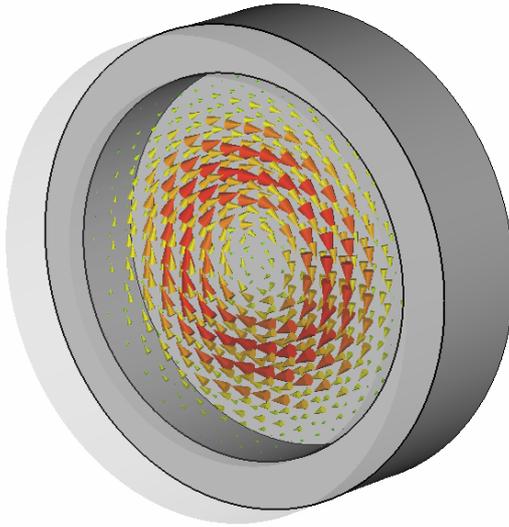
E 106 Hohlraumresonatoren (Cavities)

Mode

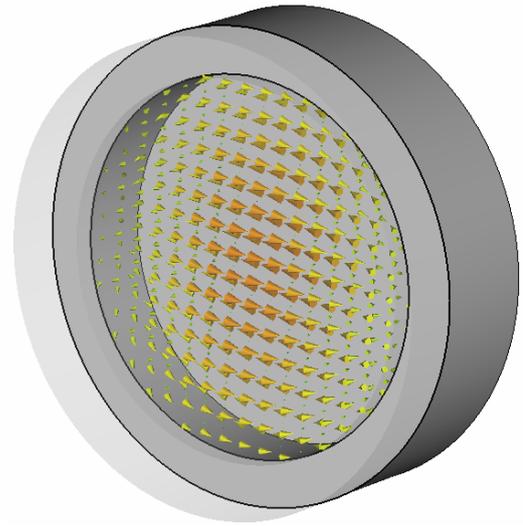
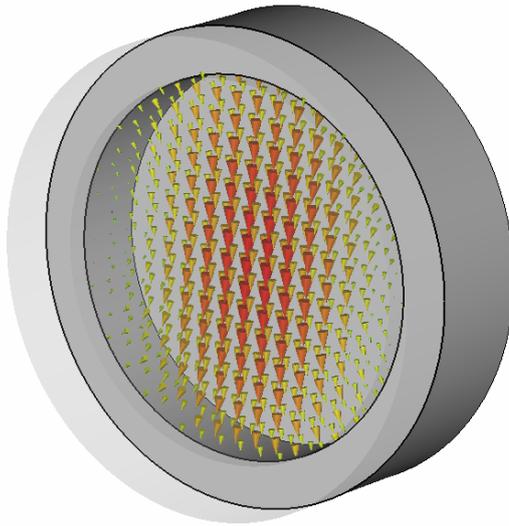
Elektrisches Feld

Magnetisches Feld

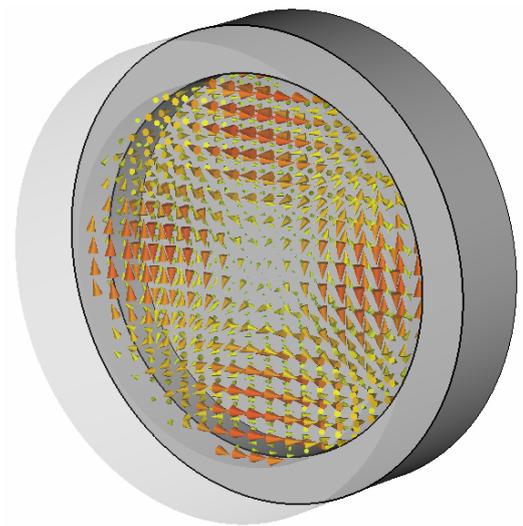
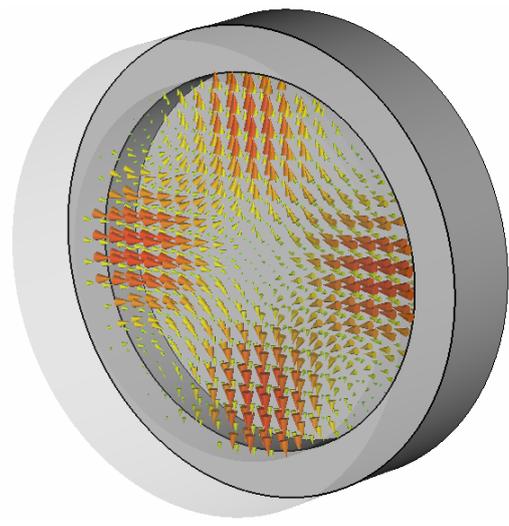
TE_{011}



TE_{111}



TE_{211}

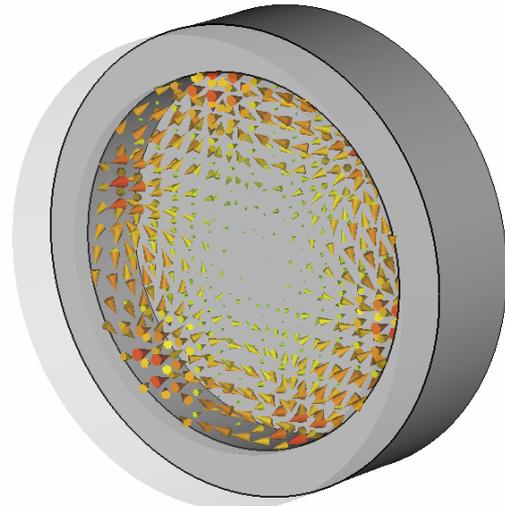
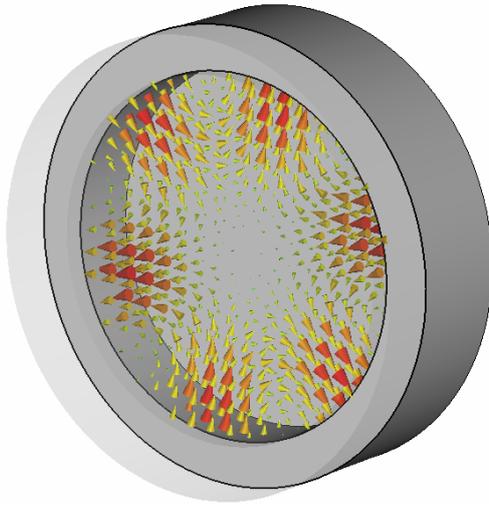


Mode

Elektrisches Feld

Magnetisches Feld

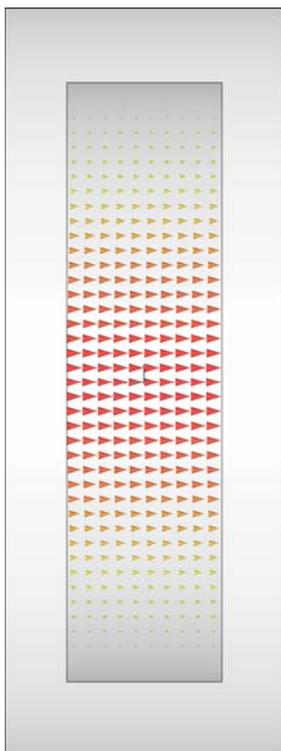
TE₃₁₁



7.2. Einfluss seitlicher Öffnungen im Resonator auf die Feldverteilung

Die im Versuch verwendeten Resonatoren weisen seitliche Öffnungen auf, welche für die Störkörpermessungen benötigt werden. Im Vergleich zum geschlossenen Resonator ergibt sich eine andere Feldverteilung, hier am Beispiel des elektrischen Feldes der TM₀₁₀-Mode (wird im Versuch bestimmt) erkennbar:

Resonator ohne Öffnungen



Resonator mit Öffnungen

